1DE2116:A - Matematyka - Metody optymalizacji EP
Projektowanie filtrów cyfrowych jako zadanie optymalizacji

Maciej Twardy

Materiał przygotowany w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój - Współpraca". Projekt współfinansowany przez Unie Europejska w ramach Europejskiego Funduszu Społeczego. Program Operacyjny Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020, Os priorytetowa III Szkolnictwo Wyzsze dla gospodarki i rozwoju, Działanie 3.5 Kompleksowe programy szkół wyższych.

1 Filtry cyfrowe

1.1 Filtry cyfrowe jako układy dynamiczne

[1, 2] Filtr cyfrowy jest układem dynamicznym typu SISO (ang. *single input, single output*). Wymuszeniem (sygnałem wejściowym) jest ciąg $\{u(k)\}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ jest dyskretnym czasem. Odpowiedzią (sygnałem wyjściowym) jest ciąg $\{y(k)\}$. W dalszym ciągu będziemy używać skrótowej notacji $u_k \equiv u(k)$ oraz $y_k \equiv y(k)$. Filtarmi typu FIR (ang. *finite impulse response*), czyli tzw. filtrami o skończonej odpowiedzi impulsowej (SOI), nazywamy filtry, dla których zachodzi

$$y_k = \sum_{i=0}^{n-1} h_i u_{k-i}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

gdzie skończony ciąg $\{h_0, \ldots, h_{n-1}\}$ nazywamy odpowiedzią impulsową filtru. Jest to dopowiedź filtru na wymuszenie impulsowe

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases} \tag{2}$$

tzn.

$$y_k = \begin{cases} h_k & \text{dla } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases} \tag{3}$$

Przykładem filtru FIR jest tzw. filtr MA (ang. *moving average*) drugiego rzędu

$$y_k = \frac{1}{2}(u_k + u_{k-1}), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

o odpowiedzi impulsowej $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.
Dyskretną transformatą Fouriera (DFT, ang. *discrete Fourier transform*) odpowiedzi impulsowej (czyli ciągu $\{h_0, \ldots, h_{n-1}\}$) nazywamy funkcję zespoloną $\tilde{H} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zdefiniowaną wzorem

$$\tilde{H}(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{k}}, \qquad \omega \in [-\pi, \pi]\,. \tag{5}$$

Funkcja $\tilde{H}(\omega)$ charakteryzuje zachowanie filtru dla wymuszeń okresowych, w szczególności, jeśli $u_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{k}}$, to $y_k = \tilde{H}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\mathrm{k}}$. Ze wzoru (5) wynika, że jeśli $h_0, \ldots, h_{n-1} \in \mathbb{R}$, to $\tilde{H}(\omega)$ jest funkcją okresową, z okresem 2π, ponadto $H^*(\omega) = H(-\omega)$. Z uwagi na te właściwości analizę funkcji $\tilde{(H)}(\omega)$ można ograniczyć do przedziału $[0, \pi]$.

1.2 Filtry FIR z liniową fazą

Ważną klasę filtrów FIR stanowią tzw. filtry pierwszego rodzaju z liniową fazą (ang. *type I linear-phase filters*), dla których $n = 2N + 1$ oraz

$$h_k = h_{n-1-k}, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Dla filtrów tych zachodzi

$$\tilde{H}(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega N} H(\omega), \quad \omega \in [0, \pi] \tag{7}$$

gdzie $H(\omega)$ jest funkcją o wartościach rzeczywistych

$$H(\omega) = h_N + 2\sum_{k=0}^{N-1} h_k \cos((N-k)\omega) \tag{8}$$

którą nazywamy odpowiedzią amplitudową (ang. *amplitude response*) filtru.
Funkcja $\tilde{H}(\omega)$ jest zespolna, zatem

$$\tilde{H}(\omega) = \|\tilde{H}(\omega)\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}. \tag{9}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases} \tag{10}$$

jest to tzw. funkcja signum. Ze wzorów (7) i (9) wynika, że faza rozpatrywanego filtru, dana wzorem

$$\varphi = -\operatorname{sgn}(H(\omega))\omega N, \tag{11}$$

może nie być funkcją ciągłą oraz że

$$\|\tilde{H}(\omega)\| = \|H(\omega)\|. \tag{12}$$

Czasami wygodniej jest posługiwać się tzw. ciągłą fazą liniową (ang. *continuous linear phase*)

$$\theta(\omega) = -\omega N \tag{13}$$

oraz odpowiedzią amplitudową $H(\omega)$, niż fazą $\varphi = -\operatorname{sgn}(H(\omega))\omega N$ i modułem $\left|\tilde{H}(\omega)\right|$. W naszym przypadku, korzystając ze wzoru (8) można napisać

$$\boxed{H(\omega) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega)\boldsymbol{h}} \tag{14}$$

gdzie

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \\ h_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}(\omega) = \begin{bmatrix} 2\cos(\omega N) \\ 2\cos(\omega(N-1)) \\ \vdots \\ 2\cos(\omega) \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

1.3 Specyfikacja projektowa dolnoprzepustowego filtru FIR

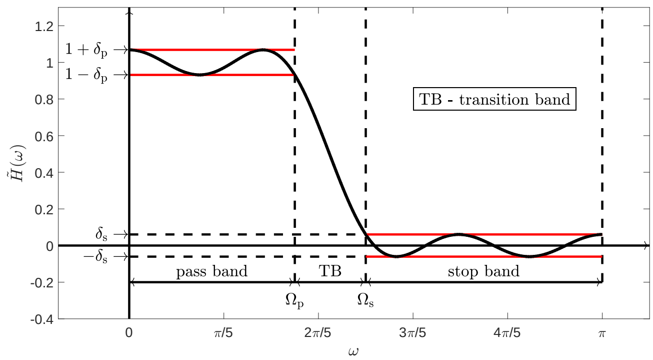
Projektowanie filtru FIR z reguły polega na dobraniu odpowiedzi impulsowej

$$\{h_0, \ldots, h_{n-1}\} \tag{16}$$

w taki sposób, aby otrzymać żądany kształt odpowiedzi amplitudowej $H(\omega)$. Przykładowo można zażądać, aby filtr przepuszczał sygnały o niskich częstościach a blokował sygnały o wysokich częstościach, mówimy wówczas o tzw. filtrze dolnoprzepustowym. Ograniczenia te możemy bardziej sprecyzować, w szczególności:

1. Ograniczenia pasma przepustowego (ang. *pass-band constraints*)
$$1-\delta_{\mathrm{p}} \leqslant H(\omega) \leqslant 1+\delta_{\mathrm{p}}, \quad \omega \in [0,\, \Omega_{\mathrm{p}}] \tag{17}$$
gdzie Ω_{p} jest tzw. częstością pasma przepustowego (krócej: częstością przepustową), zaś $\delta_{\mathrm{p}} > 0$ odpowiada maksymalnej dopuszczalnej wartości tętnień pasma przepustowego (ang. *pass-band ripple*) dla niskich częstości (Rys. 1).

2. Ograniczenia pasma zaporowego (ang. *stop-band constraints*)
$$-\delta_{\mathrm{s}} \leqslant H(\omega) \leqslant \delta_{\mathrm{s}}, \quad \omega \in [\Omega_{\mathrm{s}}, \pi] \tag{18}$$
gdzie Ω_{s} jest tzw. częstością pasma zaporowego (krócej: częstością zaporową), zaś $\delta_{\mathrm{s}} > 0$ odpowiada zadanemu poziomowi tłumienia (ang. *attenuation level*) dla wysokich częstości (Rys. 1).



Rysunek 1: Oznaczenia używane przy projektowaniu filtru dolnoprzepustowego.

1.4 Dyskretyzacja częstości

Wybieramy skończony zbiór częstości
$$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{N_{\mathrm{p}}}\} \tag{19}$$
należących do obszaru niskich częstości $[0,\, \Omega_{\mathrm{p}}]$ oraz przybliżamy ograniczenie związane z pasmem zaporowym skończoną liczbą nierówności liniowych względem $\boldsymbol{h}$
$$1-\delta_{\mathrm{p}} \leqslant H(\omega_i) \leqslant 1+\delta_{\mathrm{p}}, \quad i = 1, \ldots, N_{\mathrm{p}}\,. \tag{20}$$
czyli zgodnie ze wzorami (14) i (15)
$$1-\delta_{\mathrm{p}} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_i)\boldsymbol{h} \leqslant 1+\delta_{\mathrm{p}}, \quad i = 1, \ldots, N_{\mathrm{p}}\,. \tag{21}$$
W podobny sposób wybieramy zbiór częstości
$$\{\omega_{N_{\mathrm{p}}+1}, \omega_{N_{\mathrm{p}}+2}, \ldots, \omega_{N_{\mathrm{p}}+N_{\mathrm{s}}}\} \tag{22}$$
z obszaru $[\Omega_{\mathrm{s}},\, \pi]$ wysokich częstości oraz przybliżamy ograniczenie związane z pasmem przepustowym skończoną liczbą nierówności liniowych względem $\boldsymbol{h}$
$$-\delta_{\mathrm{s}} \leqslant H(\omega_i) \leqslant \delta_{\mathrm{s}}\,, \quad i = N_{\mathrm{p}}+1, \ldots, N_{\mathrm{p}}+N_{\mathrm{s}}\,. \tag{23}$$
czyli zgodnie ze wzorami (14) i (15)
$$-\delta_{\mathrm{s}} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_i)\boldsymbol{h} \leqslant \delta_{\mathrm{s}}\,, \quad i = N_{\mathrm{p}}+1, \ldots, N_{\mathrm{p}}+N_{\mathrm{s}}\,. \tag{24}$$

1.5 Projektowanie filtrów FIR metodą minimalizacji tętnień

Biorąc pod uwagę dotychczasowe rozważania możemy sformułować zadanie projektowania filtru FIR jako zadanie optymalizacji LP (ang. *linear programming*). Przykładowo, można ustalić wartość $\delta_{\mathrm{s}} > 0$ i znaleźć $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ i $\delta_{\mathrm{p}} \in \mathbb{R}$ tak, aby zminimalizować tętnienia w paśmie przepustowym
$$\begin{array}{ll}\underset{\boldsymbol{h},\,\delta_{\mathrm{p}}}{\text{minimize}} & \delta_{\mathrm{p}} \\ \text{subject to} & 1-\delta_{\mathrm{p}} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_1)\boldsymbol{h} \leqslant 1+\delta_{\mathrm{p}} \\ & 1-\delta_{\mathrm{p}} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_2)\boldsymbol{h} \leqslant 1+\delta_{\mathrm{p}} \\ & \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & 1-\delta_{\mathrm{p}} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_{N_{\mathrm{p}}})\boldsymbol{h} \leqslant 1+\delta_{\mathrm{p}} \\ & -\delta_{\mathrm{s}} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_{N_{\mathrm{p}}+1})\boldsymbol{h} \leqslant \delta_{\mathrm{s}} \\ & -\delta_{\mathrm{s}} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_{N_{\mathrm{p}}+2})\boldsymbol{h} \leqslant \delta_{\mathrm{s}} \\ & \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & -\delta_{\mathrm{s}} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_{N_{\mathrm{p}}+N_{\mathrm{s}}})\boldsymbol{h} \leqslant \delta_{\mathrm{s}} \end{array} \tag{25}$$

Oznaczając
$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_1) \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_{N_{\mathrm{p}}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(\omega_1 N) & 2\cos(\omega_1(N-1)) & \cdots & 2\cos(\omega_1) & 1 \\ 2\cos(\omega_2 N) & 2\cos(\omega_2(N-1)) & \cdots & 2\cos(\omega_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}} N) & 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}}(N-1)) & \cdots & 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}}) & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{26}$$
$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_{N_{\mathrm{p}}+1}) \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_{N_{\mathrm{p}}+2}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_{N_{\mathrm{p}}+N_{\mathrm{s}}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}+1} N) & 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}+1}(N-1)) & \cdots & 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}+1}) & 1 \\ 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}+2} N) & 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}+2}(N-1)) & \cdots & 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}+2}) & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}+N_{\mathrm{s}}} N) & 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}+N_{\mathrm{s}}}(N-1)) & \cdots & 2\cos(\omega_{N_{\mathrm{p}}+N_{\mathrm{s}}}) & 1 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

można napisać zadanie (25) w bardziej zwartej formie
$$\begin{array}{ll}\underset{\boldsymbol{h},\,\delta_{\mathrm{p}}}{\text{minimize}} & \delta_{\mathrm{p}} \\ \text{subject to} & (1-\delta_{\mathrm{p}})\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{A}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{h} \leqslant (1+\delta_{\mathrm{p}})\boldsymbol{1} \\ & -\delta_{\mathrm{s}}\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{h} \leqslant \delta_{\mathrm{s}}\boldsymbol{1} \end{array} \tag{28}$$

Można również zminimalizować poziom tłumienia δ_{s} przy ograniczeniu nałożonym na tętnienia w paśmie przepustowym δ_{p} co prowadzi do zadania LP
$$\begin{array}{ll}\underset{\boldsymbol{h},\,\delta_{\mathrm{s}}}{\text{minimize}} & \delta_{\mathrm{s}} \\ \text{subject to} & (1-\delta_{\mathrm{p}})\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{A}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{h} \leqslant (1+\delta_{\mathrm{p}})\boldsymbol{1} \\ & -\delta_{\mathrm{s}}\boldsymbol{1} \leqslant \boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{h} \leqslant \delta_{\mathrm{s}}\boldsymbol{1} \end{array} \tag{29}$$

Można również postawić zadanie znalezienia kompromisu między δ_p i δ_s dla różnych wartości parametru $\mu \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{h},\,\delta_\mathrm{s},\,\delta_\mathrm{p}}{\text{minimize}} \quad & \mu\delta_\mathrm{s} + (1-\mu)\delta_\mathrm{p} \\ \text{subject to} \quad & (1-\delta_\mathrm{p})\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{A}_\mathrm{p}\boldsymbol{h} \leqslant (1+\delta_\mathrm{p})\mathbf{1} \\ & -\delta_\mathrm{s}\mathbf{1} \leqslant \boldsymbol{A}_\mathrm{s}\boldsymbol{h} \leqslant \delta_\mathrm{s}\mathbf{1} \end{aligned} \tag{30}$$

Zadanie 1. Dla parametrów $N = 10$ (czyli $n = 2N+1 = 21$), $\Omega_\mathrm{p} = 0.35\pi$, $\Omega_\mathrm{s} = 0.50\pi$, $\delta_\mathrm{p} = 0.02$ (czyli $-33.98\,\mathrm{dB}$), przy dyskretyzacji częstości $N_\mathrm{s} = N_\mathrm{p} = 100$ równoodległych liniowo punktów. Rozwiązać zadanie optymalizacji (29).

Wskazówka 1 Jeśli zdefiniowaliśmy funkcję określoną dla argumentów skalarnych i chcemy użyć jej dla argumentów macierzowych, w takim sensie, że dla

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & \dots & w_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \tag{31}$$

$$f(W) = \begin{bmatrix} f(w_{11}) & \dots & f(w_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(w_{m1}) & \dots & f(w_{mn}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \tag{32}$$

to można skorzystać z polecenia `arrayfun`.

Wskazówka 2 Przy tworzeniu macierzy (26) i (27), wygodnie jest skorzystać z faktu, że funkcja `cos` jest określona dla argumentów tablicowych oraz faktu, że dla

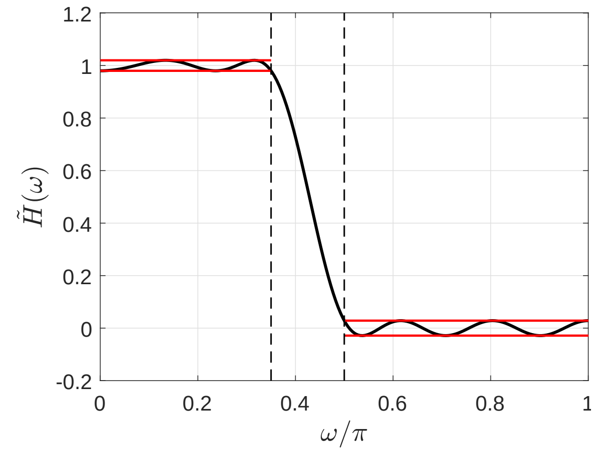
$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \tag{33}$$

mamy

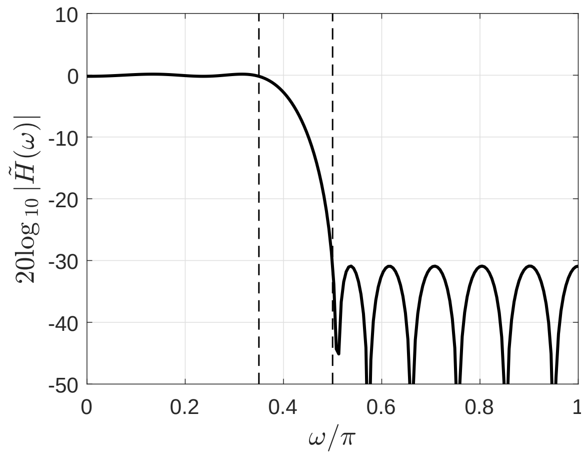
$$\begin{aligned} vw^\mathrm{T} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1w_1 & \dots & v_1w_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_mw_1 & \dots & v_mw_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{aligned} \tag{34}$$

Wskazówka 3 Chcąc utworzyć wektor, którego elementy odpowiadają równoodległym punktom na odcinku prostej, wygodnie jest skorzystać z polecenia `linspace`.

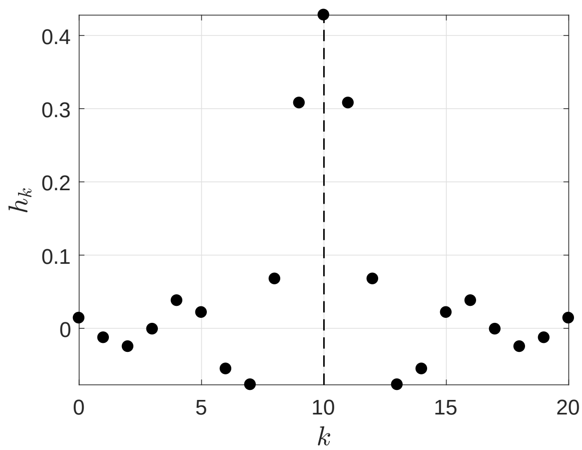
Wyniki: otrzymujemy tłumienie pasma zaporowego $\delta_\mathrm{s} = 0.0285$ (czyli $-30.90\,\mathrm{dB}$). Wykres odpowiedzi amplitudowej przedstawia Rys. 2, odpowiadający mu wykres $20\log_{10}|H(\omega)|$ przedstawia Rys. 3, wartości pierwszych $N+1$ współczynników filtru: $h_0 = 0.0139$, $h_1 = -0.0130$, $h_2 = -0.0251$, $h_3 = -0.0012$, $h_4 = 0.0377$, $h_5 = 0.0215$, $h_6 = -0.0555$, $h_7 = -0.0771$, $h_8 = 0.0674$, $h_9 = 0.3076$, $h_{10} = 0.4277$, są to równocześnie kolejne wartości odpowiedzi impulsowej filtru [Rys. 4].



Rysunek 2: Wykres odpowiedzi amplitudowej $H(\omega)$ [danej wzorem (8)] dla filtru z Zadania 1.



Rysunek 3: Wykres $20\log_{10}|H(\omega)|$ dla filtru z Zadania 1.



Rysunek 4: Współczynniki filtru $\{h_0, \dots, h_{2N+1}\}$ $(N = 10)$ z Zadania 1. Pierwsze $N+1$ współczynników odpowiada odpowiedzi impulsowej filtru. Współczynniki są symetryczne względem h_N.

1.6 Projektowanie filtru przez dopasowanie do zadanego wzorca

Metoda ta polega na wyznaczeniu współczynników $h_0, \dots, h_{n-1}$ filtru poprzez dopasowanie jego odpowiedzi amplitudowej do pewnej zadanej przez projektanta referencyjnej odpowiedzi amplitudowej.

1.6.1 Podejście LS

Niech $H_{\mathrm{ref}}(\omega)$ będzie zadaną referencyjną odpowiedzią amplitudową, weźmy pod uwagę dyskretyzację $\omega_1, \ldots, \omega_M$ przedziału częstości $[0,\,\pi]$. Szukamy wektora $\boldsymbol{h}$ współczynników w taki sposób, aby zminimalizować

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^{M} \left(H(\omega_i) - H_{\mathrm{ref}}(\omega_i)\right)^2 \tag{35}$$

Ponieważ $H(\omega) = a^{\mathrm{T}}(\omega)h$, to (35) jest zadaniem LS (ang. *least squares*, tzn. najmniejszych kwadratów)

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} - \boldsymbol{b}\|_2^2 \tag{36}$$

gdzie

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\omega_M) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} H_{\mathrm{ref}}(\omega_1) \\ \vdots \\ H_{\mathrm{ref}}(\omega_M) \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Zadanie (36) jest równoważne zadaniu

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} - \boldsymbol{b}\|_2\,, \tag{38}$$

w obydwu przypadkach mówimy o tzw. zadaniu najmniejszych kwadratów (ang. *least squares*). Rozwiązaniem obydwu tych zadań jest $\boldsymbol{h}^\star = \boldsymbol{A}^\dagger \boldsymbol{b}$, gdzie $\dagger$ oznacza (pseudo)inwersję Moore'a-Penrose'a, jeśli macierz $\boldsymbol{A}$ ma niezależne liniowo kolumny, co w rozpatrywanym kontekście praktycznie zawsze ma miejsce, to jest to rozwiązanie jedyne.
Można również rozpatrywać modyfikację tego zadania wprowadzając wagi $q_1, \ldots, q_M > 0$ dla poszczególnych częstości

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^{M} q_i^2 \left(H(\omega_i) - H_{\mathrm{ref}}(\omega_i)\right)^2, \tag{39}$$

duża wartość wagi q_i oznacza wysoki koszt niedopasowania (ang. *mismatch*) dla częstości ω_i. Oznaczając

$$\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_m), \tag{40}$$

można napisać zadanie (39) w postaci

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} - \boldsymbol{b})\|_2^2\,. \tag{41}$$

czyli

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \left\|(\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{h} - \tilde{\boldsymbol{b}})\right\|_2^2, \tag{42}$$

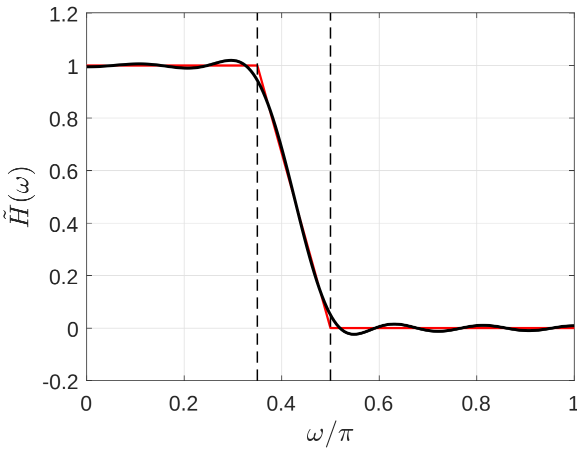
gdzie

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{b}. \tag{43}$$

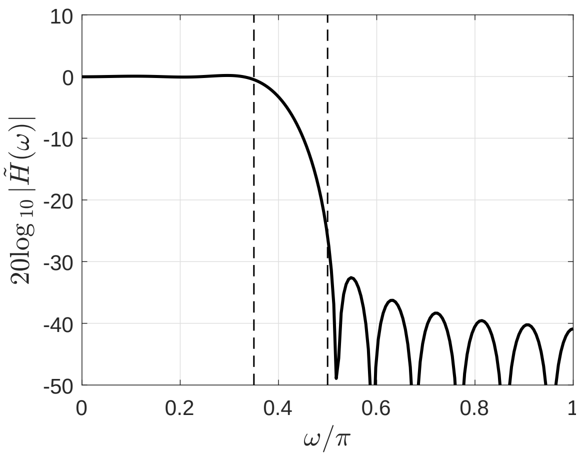
Zadanie 2. Dla parametrów $N = 10$ (czyli $n = 2N+1 = 21$), $M = 200$ i zadanej odpowiedzi referencyjnej, która jest równa 1 dla częstości mniejszych niż $\Omega_{\mathrm{p}} = 0.35\pi$ i 0 dla częstości większych niż $\Omega_{\mathrm{s}} = 0.50\pi$, a pomiędzy tymi punktami zmienia się liniowo od 1 do 0, zaprojektować (tzn. wyznaczyć współczynniki odpowiedzi impulsowej) filtr rozwiązując zadanie optymalizacji (36). Zauważmy, że charakterystyka referencyjna jest określona następująco.

$$H_{\mathrm{ref}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \ \omega \in [0,\,\Omega_{\mathrm{p}}]\,, \\ \frac{\omega}{\Omega_{\mathrm{p}}-\Omega_{\mathrm{s}}} - \frac{\Omega_{\mathrm{s}}}{\Omega_{\mathrm{p}}-\Omega_{\mathrm{s}}} & \text{dla } \ \omega \in [\Omega_{\mathrm{p}},\,\Omega_{\mathrm{s}}]\,, \\ 0 & \text{dla } \ \omega \in [\Omega_{\mathrm{s}},\,\pi]\,. \end{cases} \tag{44}$$

W środowisku Matlab można taką funkcję zdefioniować korzystając z polecenia `piecewise`.
Wyniki: otrzymujemy wykresy przedstawione na Rys. 5 i Rys. 6.



Rysunek 5: Wykres odpowiedzi amplitudowej filtru z Zadania 2, otrzymanego przez dopasowanie LS. Czerwoną linią zaznaczono odpowiedź referencyjną $H_{\mathrm{ref}}(\omega)$.



Rysunek 6: Wykres $20\log_{10}|H(\omega)|$ dla filtru z Zadania 2, otrzymanego metodą dopasowania LS.

1.6.2 Podejście LP

Podejście LP jest bardzo podobne w swoim sformułowaniu do podejścia LS. Różnica polega na zastąpieniu normy euklidesowej normą l_1. Niech $H_{\mathrm{ref}}(\omega)$ będzie zadaną referencyjną odpowiedzią amplitudową, weźmy pod uwagę dyskretyzację $\omega_1, \ldots, \omega_M$ przedziału częstości $[0,\,\pi]$. Szukamy wektora $\boldsymbol{h}$ współczynników w taki sposób, aby zminimalizować

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^{M} |H(\omega_i) - H_{\mathrm{ref}}(\omega_i)| \tag{45}$$

Ponieważ $H(\omega) = a^{\mathrm{T}}(\omega)h$, to (45) jest równoważne zadaniu

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h} - \boldsymbol{b}\|_1 \tag{46}$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{b}$ są dane przez (37). Można pokazać, że jest to zadanie LP. Podobnie jak dla podejścia LS Można również rozpatrywać modyfikację tego zadania wprowadzając wagi $q_1, \ldots, q_M > 0$ dla poszczególnych częstości

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^{M} q_i^2 |H(\omega_i) - H_{\mathrm{ref}}(\omega_i)|, \tag{47}$$

duża wartość wagi q_i oznacza wysoki koszt niedopasowania (ang. *mismatch*) dla częstości ω_i. Oznaczając

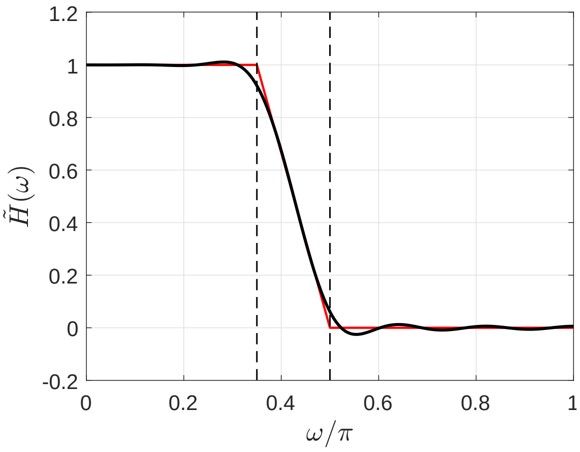
$$\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_m), \tag{48}$$

można napisać zadanie (47) w postaci

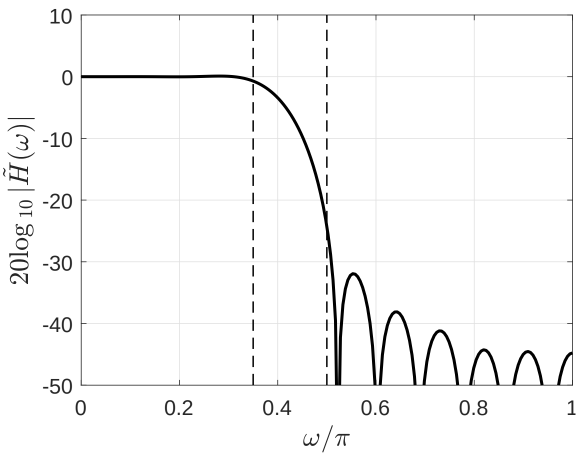
$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})\|_1 . \tag{49}$$

Zadanie 3. Dla parametrów $N = 10$ (czyli $n = 2N+1 = 21$), $M = 200$ i zadanej odpowiedzi referencyjnej, która jest równa 1 dla częstości mniejszych niż $\Omega_\mathrm{p} = 0.35\pi$ i 0 dla częstości większych niż $\Omega_\mathrm{s} = 0.50\pi$, a pomiędzy tymi punktami zmienia się liniowo od 1 do 0, zaprojektować (tzn. wyznaczyć współczynniki odpowiedzi impulsowej) filtr rozwiązując zadanie optymalizacji (46).

Wyniki: otrzymujemy wykresy przedstawione na Rys. 7 i Rys. 8.



Rysunek 7: Wykres odpowiedzi amplitudowej filtru z Zadania 3, otrzymanego przez dopasowanie LP. Czerwoną linią zaznaczono odpowiedź referencyjną $H_\mathrm{ref}(\omega)$.



Rysunek 8: Wykres $20\log_{10}|H(\omega)|$ dla filtru z Zadania 3, otrzymanego metodą dopasowania LP.

1.6.3 Podejście Czebyszewa

Projektowanie tą metodą pozwala zminimalizować największą niezgodność

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \max_{i=1,\dots,M} |H(\omega_i) - H_\mathrm{ref}(\omega_i)| \tag{50}$$

lub równoważnie

$$\underset{\boldsymbol{h}}{\text{minimize}} \quad \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})\|_\infty , \tag{51}$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{b}$ są określone wzorem (37). Zadanie to można sformułować jako zadanie LP

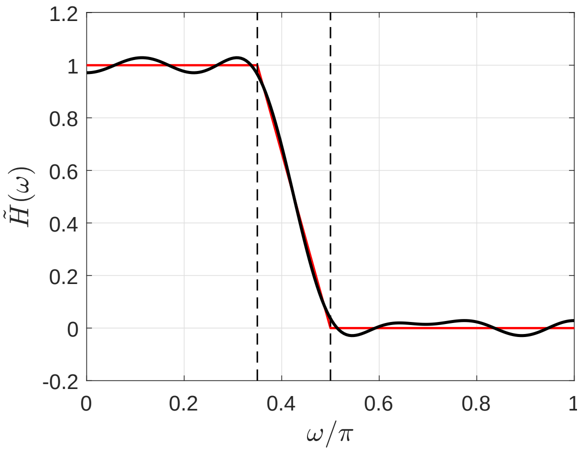
$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{h},\,\gamma}{\text{minimize}} \quad & \gamma \\ \text{subject to} \quad & -\gamma \leqslant w_1\left(\boldsymbol{a}^\mathrm{T}(\omega_1)\boldsymbol{h} - H_\mathrm{ref}(\omega_1)\right) \leqslant \gamma \\ & -\gamma \leqslant w_2\left(\boldsymbol{a}^\mathrm{T}(\omega_2)\boldsymbol{h} - H_\mathrm{ref}(\omega_2)\right) \leqslant \gamma \\ & \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ & -\gamma \leqslant w_M\left(\boldsymbol{a}^\mathrm{T}(\omega_M)\boldsymbol{h} - H_\mathrm{ref}(\omega_M)\right) \leqslant \gamma \end{aligned} \tag{52}$$

czyli

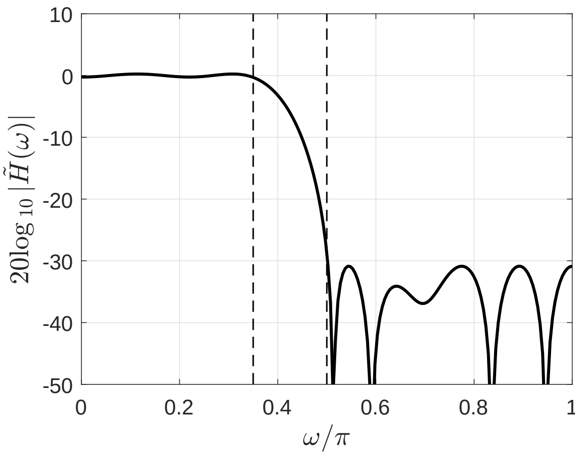
$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{h},\,\gamma}{\text{minimize}} \quad & \gamma \\ \text{subject to} \quad & -\gamma\mathbf{1} \leqslant (\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b}) \leqslant \gamma\mathbf{1} \end{aligned} \tag{53}$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{b}$ są określone przez wzorem (37).

Zadanie 4. Dla danych liczbowych z Zadania 4 zaprojektować filtr rozwiązując zadanie optymalizacji (53). Wyniki: otrzymujemy wykresy przedstawione na Rys. 9 i Rys. 10. Wartość największej rozbieżności wynosi $\gamma = 0.0313$ (tzn. $-30.1\,\mathrm{dB}$).



Rysunek 9: Wykres odpowiedzi amplitudowej filtru FIR otrzymanego metodą Czebyszewa dla filtru z Zadania 4. Czerwoną linią zaznaczono odpowiedź referencyjną $H_\mathrm{ref}(\omega)$.



Rysunek 10: Wykres $20\log_{10}|H(\omega)|$ dla filtru z Zadania 4, otrzymanego metodą dopasowania Czebyszewa.

Podejścia LS, LP i Czebyszewa można traktować jako szczególne przypadki bardziej ogólnej metody polegającej na dopasowaniu charakterystyki filtra do zadanego wzorca (charakterystyki referencyjnej) poprzez minimalizację normy wyrażenia $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b}$. Dla podejścia LS jest to norma euklidesowa l_2, dla modejścia LP jest to norma l_1, dla podejscia Czebyszewa jest to norma l_∞ (zwana też normą Czebyszewa).

Literatura

[1] G.C. Calafiore and L. El Ghaoui. *Optimization Models*. Control systems and optimization series. Cambridge University Press, 2014.

[2] Richard G Lyons. *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2010.