

1 Wstęp

1.1 Wykresy funkcji w środowisku Matlab

Przykład 1. Chcemy wykonać wykres (w środowisku Matlab) oraz wyznaczyć (numerycznie) wartość całki oznaczonej, w granicach od -4 do 4 z funkcji

$$f(t) = e^{-t^2} \sin^2(5t). \quad (1)$$

Ponadto, chcemy wykonać wykres (w granicach od -4 do 4) z funkcji

$$f_{\text{env}}(t) = e^{-t^2}. \quad (2)$$

Wykres funkcji (1) oraz (2) przedstawia Rys. 1. Wykresy te można wykonać korzystając z jednego z następujących skryptów (Listing 1 i Listing 2).

Listing 1.

```
clear
close all
clc
nfonstlatex = 18;
nfonts = 14;

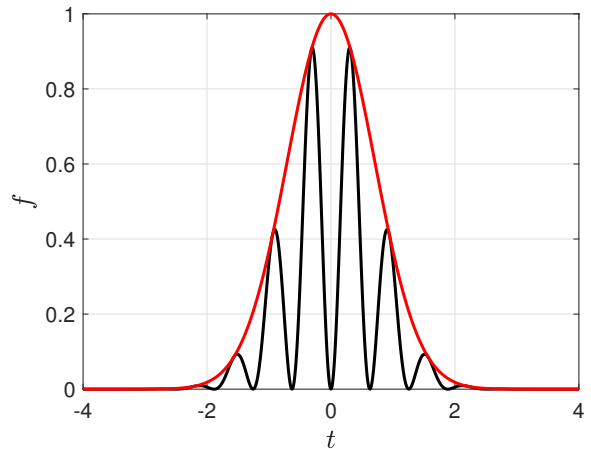
f_scalar = @(t) exp(-t^2)*(sin(5*t))^2;
f = @(t) arrayfun(f_scalar,t);
I_1 = integral(f,-4,4);
disp(I_1)
I_2 = integral(@(t) arrayfun(f_scalar,t),-4,4);
disp(I_2)

f_envelope_scalar = @(t) exp(-t^2);

t = linspace(-4,4,1e+3);

figure
plot(t,f(t),'-k','LineWidth',2.0)
hold on
plot(t,arrayfun(f_envelope_scalar,t), ...
     '-r','LineWidth',2.0)

grid on
set(gca,'FontSize',nfonts)
xlabel('$t$','Interpreter','Latex', ...
     'FontSize',nfonstlatex)
ylabel('$f$','Interpreter','Latex', ...
     'FontSize',nfonstlatex)
print('../Figures/functionPlot01A.eps', ...
     '-depsc','-r600')
print('../Figures/functionPlot01A.jpg', ...
     '-djpeg','-r600')
print('../Figures/functionPlot01A.pdf', ...
     '-dpdf','-r600')
```



Rysunek 1: Wartości zmiennych x_1, x_2 w funkcji czasu t . [Przykład 2]

Listing 2.

```
clear, close all, clc
nfonstlatex = 18;
nfonts = 14;

f = @(t) exp(-t.^2).*(sin(5*t)).^2;
I = integral(f,-4,4);
disp(I)

f_envelope = @(t) exp(-t.^2);

t = linspace(-4,4,1e+3);

figure
plot(t,f(t),'-k','LineWidth',2.0)
hold on
plot(t,f_envelope(t),'-r','LineWidth',2.0)

grid on
set(gca,'FontSize',nfonts)
xlabel('$t$','Interpreter','Latex', ...
     'FontSize',nfonstlatex)
ylabel('$f$','Interpreter','Latex', ...
     'FontSize',nfonstlatex)
print('../Figures/functionPlot01A.eps', ...
     '-depsc','-r600')
print('../Figures/functionPlot01A.jpg', ...
     '-djpeg','-r600')
print('../Figures/functionPlot01A.pdf', ...
     '-dpdf','-r600')
```

Wynik: wartość rozpatrywanej całki wynosi $I = 0.8862$.

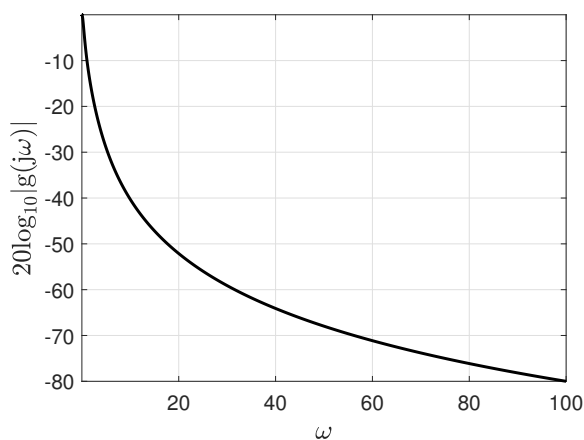
Zadanie 1. Wykonać wykres funkcji

$$f(\omega) = 20 \log_{10} |G(i\omega)|, \quad (3)$$

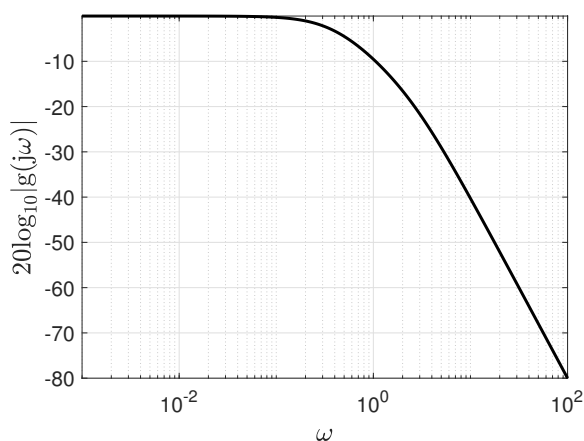
gdzie

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}. \quad (4)$$

Wykres należy wykonać stosując na osi odciętych skalę a) liniową [Rys. 2] b) logarytmiczną [Rys. 3] (skorzystać z poleceń `logspace` i `semilogx`). Zakres pulsacji od ϵ do 100 rad/s, gdzie ϵ jest małą liczbą dodatnią np. $\epsilon = 10^{-3}$.



Rysunek 2: Wykres funkcji (3) dla skali liniowej na osi OX. [Zadanie 1]



Rysunek 3: Wykres funkcji (3) dla skali logarytmicznej na osi OX. [Zadanie 1]

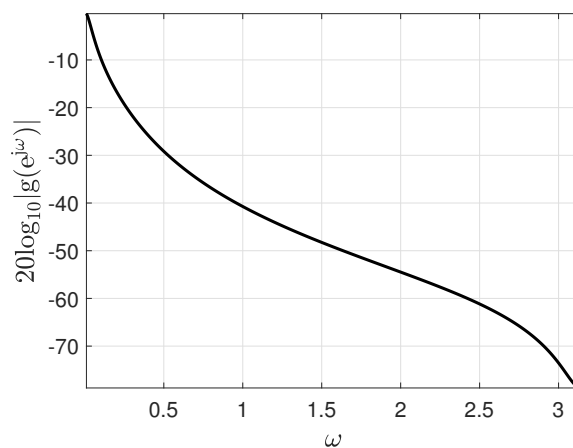
Zadanie 2. Wykonać wykres funkcji

$$f(\omega) = 20 \log_{10} |H(e^{i\omega})|, \quad (5)$$

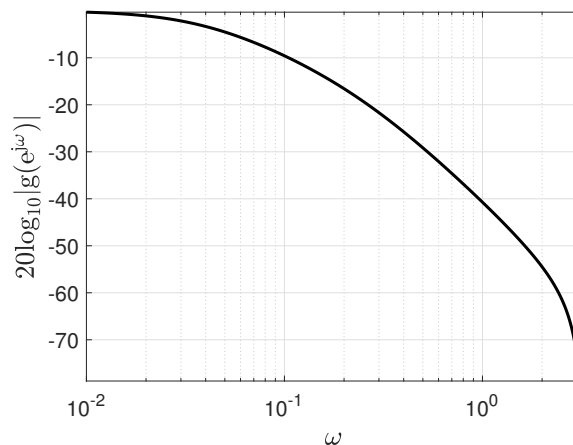
gdzie

$$H(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}, \quad (6)$$

oraz $a_1 = -1.7322$, $a_2 = 0.7408$, $b_1 = 0.0045$, $b_2 = 0.0041$. Wykres należy wykonać stosując na osi odciętych skalę a) liniową [Rys. 4] b) logarytmiczną [Rys. 5] (skorzystać z poleceń `logspace` i `semilogx`). Zakres pulsacji od ϵ do 100 rad/s, gdzie ϵ jest małą liczbą dodatnią np. $\epsilon = 10^{-3}$.



Rysunek 4: Wykres funkcji (5) dla skali liniowej na osi OX. [Zadanie 2]



Rysunek 5: Wykres funkcji (5) dla skali logarytmicznej na osi OX. [Zadanie 2]

1.2 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych w środowisku Matlab

Informacje o rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych w środowisku Matlab:

<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (7)$$

na przedziale $[t_{\text{init}}, t_{\text{final}}]$ z warunkiem początkowym

$$x(t_{\text{init}}) = x_0, \quad (8)$$

możemy wyznaczyć korzystając z procedury `ode45`.

Przykład 2. Dane jest tzw. równanie van der Pola

$$\ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + y = 0, \quad (9)$$

gdzie $\mu > 0$ jest parametrem. Chcemy wyznaczyć rozwiązanie tego równania na przedziale $[0, 20]$, dla warunków początkowych $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 0$. Jest to równanie drugiego rzędu, aby skorzystać z procedury `ode45` należy przekształcić je do układu równań pierwszego rzędu. Możemy to zrobić przyjmując oznaczenia $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$. Wówczas mamy

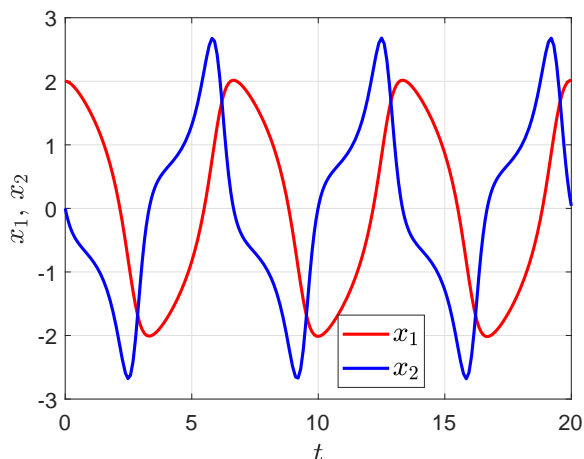
$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (10a)$$

$$\dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1, \quad (10b)$$

czyli postać (7) gdzie

$$f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Zauważmy, że w rozpatrywanym przypadku funkcja $f(t, x(t))$ nie zależy w sposób jawny od zmiennej niezależnej t (która często oznacza czas). Poszukiwane rozwiązanie można wyznaczyć za pomocą kodu z Listingu 3. Wykres otrzymanego rozwiązania przedstawia Rys. 6



Rysunek 6: Wartości zmiennych x_1, x_2 w funkcji czasu t . [Przykład 2]

Listing 3.

```
clear
close all
clc
nfontslatex = 18;
nfonts = 14;

m = 1.0;
f = @(t,x) [x(2); m*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)];
tInit = 0.0;
tFinal = 20.0;
xInit = [2; 0];
options = odeset('RelTol',1e-14,'AbsTol',1e-14);
[t,X] = ode45(f,[tInit,tFinal],xInit,options);

figure
plot(t,X(:,1),'r','LineWidth',2.0)
hold on
grid on
plot(t,X(:,2),'b','LineWidth',2.0)
set(gca,'FontSize',nfonts)
xlabel('$t$', 'Interpreter','Latex', ...
    'FontSize',nfontslatex)
ylabel('$x_1, x_2$', ...
    'Interpreter','Latex','FontSize',nfontslatex)
legend({'$x_1$', '$x_2$'}, ...
    'Interpreter','Latex', ...
    'FontSize',nfontslatex,'Location','Best')
print('VDP.eps','-depsc','-r600')
print('VDP.jpg','-djpeg','-r600')
print('VDP.pdf','-dpdf','-r600')
```

Rozpatrzmy modyfikację układu równań 10

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sin(t), \quad (12a)$$

$$\dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 + 2 \cos(t), \quad (12b)$$

czyli postać (7) gdzie

$$f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} x_2 + \sin(t) \\ \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 + 2 \cos(t) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

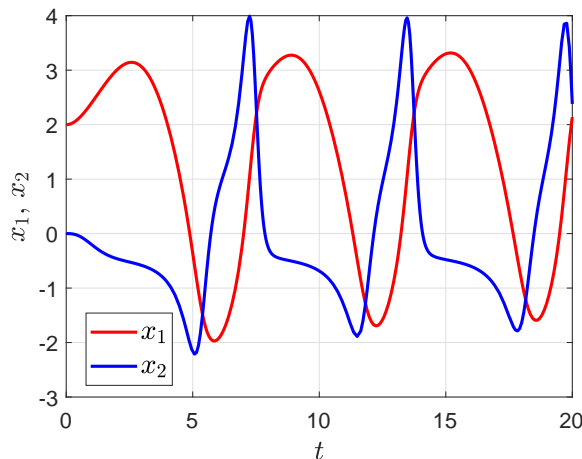
Zauważmy, że w tym przypadku funkcja $f(t, x(t))$ zależy w sposób jawny od zmiennej niezależnej t . Aby wyznaczyć rozwiązanie układu (12) wystarczy zmodyfikować dotychczasowy kod, w szczególności wiersz w którym zdefiniowano funkcję $f(t, x(t))$, zamiast

```
f = @(t,x) [x(2); m*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)];
```

wpisać

```
f = @(t,x) [x(2); m*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)] + ...
[sin(t); 2*cos(t)];
```

Wykres otrzymanego rozwiązania przedstawia Rys. 7



Rysunek 7: Wartości zmiennych x_1, x_2 w funkcji czasu t . [Przykład 2]

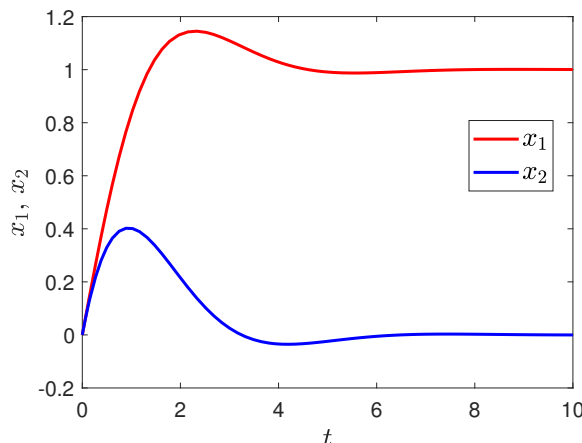
Zadanie 3. Powtórzyc wyniki z Przykładu 2.

Zadanie 4. Zakładając zerowe warunki początkowe, na przedziale czasu $[0, 10]$, wykonać symulację układu dynamicznego $\dot{x} = Ax + Bu$, gdzie

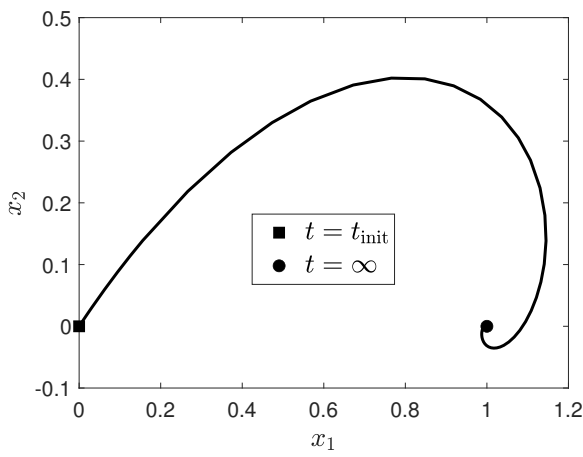
$$A = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.0 \\ -1.0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Symulację wykonać dla wymuszenia w postaci a) skoku jednostkowego $u(t) = 1$, b) $u(t) = \sin(t)$. Korzystając z funkcji eig sprawdzić czy układ jest stabilny. Dla wymuszenia z podpunktu a) powtórzyć symulację dla przedziału $[0, 1.0]$ i warunków początkowych

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$



Rysunek 8: Wartości zmiennych stanu x_1, x_2 w funkcji czasu. [Przykład 4]



Rysunek 9: Trajektoria stanu dla wymuszenia w postaci skoku jednostkowego. Symbolem ■ zaznaczono początek trajektorii ($t = t_{\text{init}}$), symbolem ● zaznaczono koniec trajektorii ($t = \infty$, tzn. punkt stacjonarny) [Przykład 4]

Zadanie 5. Wyznaczyć i wygenerować rozwiązania równania

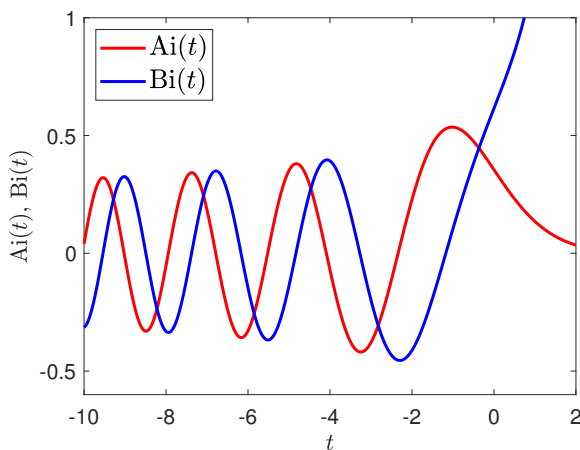
$$\ddot{x}(t) = tx(t), \quad (16)$$

na przedziale $[-10, 2]$, z warunkami początkowymi, odpowiednio,

$$x(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})}, \quad \dot{x}(0) = -\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{1}{3})}, \quad (17)$$

$$x(0) = \frac{1}{3^{\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{2}{3})}, \quad \dot{x}(0) = \frac{3^{\frac{1}{6}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}, \quad (18)$$

gdzie Γ oznacza funkcję gamma Eulera (funkcja gamma w środowisku Matlab). Korzystając z polecenia `ode45` należy pamiętać, że dopuszcza ono sytuację $t_{\text{init}} > t_{\text{final}}$. Wówczas warunek początkowy $x(\text{init})$ jest de facto warunkiem końcowym. Rozwiązanie odpowiadające warunkom (17) jest tzw. pierwszą funkcją Airy'ego, $\text{Ai}(t)$, natomiast rozwiązanie odpowiadające warunkom (18) jest tzw. drugą funkcją Airy'ego, $\text{Bi}(t)$. Sprawdzić otrzymane wyniki korzystając z funkcji `airy` środowiska Matlab.



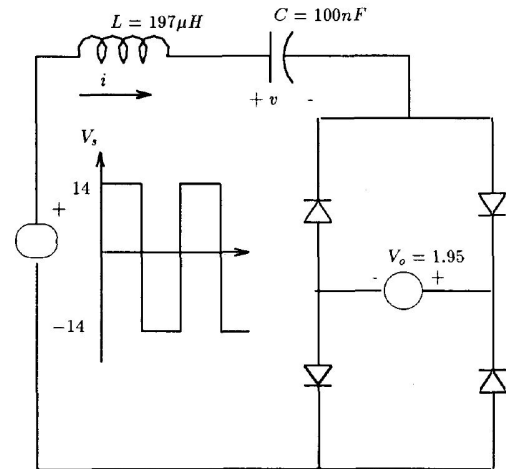
Rysunek 10: Funkcje Airy'ego.

Zadanie 6. Układ z Rys. 11 (szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem napięciowym, ang. *DC-DC series resonant converter with voltage source load*) [1] jest opisany równaniami

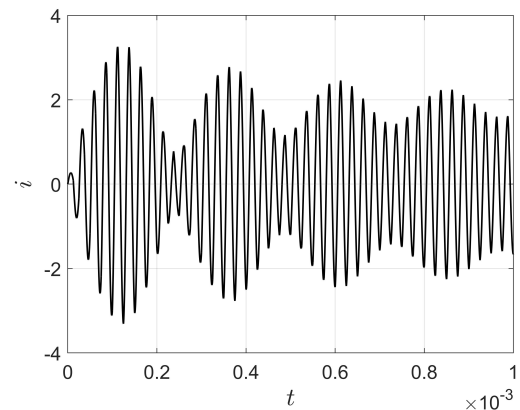
$$\frac{d}{dt}i = \frac{1}{L} [-v - V_0 \text{sgn}(i) + V_s \text{sgn}(\sin(\omega_s t))], \quad (19a)$$

$$\frac{d}{dt}v = \frac{1}{C}i \quad (19b)$$

Wyznacz przebiegi natężenia prądu dławika i oraz napięcia v na kondensatorze w przedziale czasowym $[0, 0.003]$, częstotliwość przełączania $f_s = 40$ kHz.



Rysunek 11: szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem napięciowym [1].



Rysunek 12: szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem napięciowym [1].

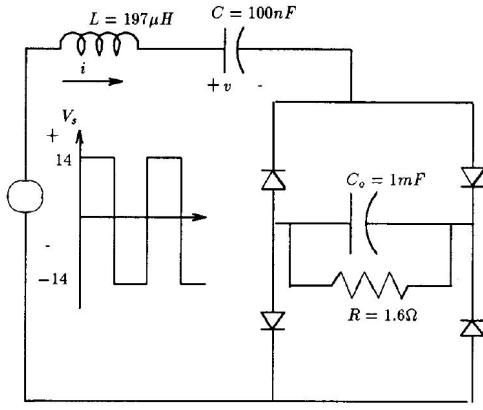
Zadanie 7. Układ z Rys. 13 (szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem pojemnościowym, ang. *DC-DC series resonant converter with capacitor load*) [1] jest opisany równaniami

$$\frac{d}{dt}i = \frac{1}{L} [-v - V_0 \text{sgn}(i) + V_s \text{sgn}(\sin(\omega_s t))], \quad (20a)$$

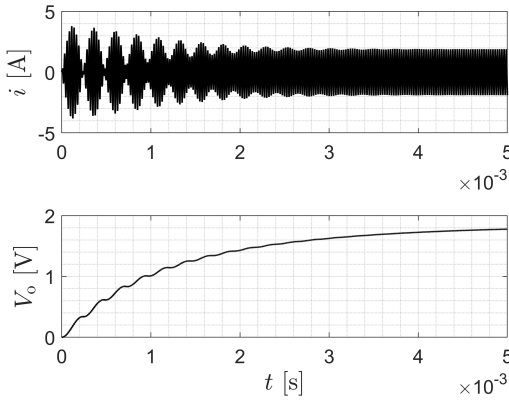
$$\frac{d}{dt}v = \frac{1}{C}i \quad (20b)$$

$$\frac{d}{dt}v_0 = \frac{1}{C_0} \left[\text{abs}(i) - \frac{v_0}{R} \right] \quad (20c)$$

Wyznacz przebiegi natężenia prądu dławika i oraz napięcia v na kondensatorze w przedziale czasowym $[0, 0.003]$, częstotliwość przełączania $f_s = 40$ kHz.



Rysunek 13: szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem pojemnościowym [1].



Rysunek 14: szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem napięciowym [1].

Zadanie 8. Układ z Rys. 15 (przekształtnik *buck-boost*) [1] jest opisany równaniem

$$\dot{x} = Ax + uBx + bu + f, \quad (21)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_2)}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C(R+R_3)} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-R_3(2R+R_3)}{L(R+R_3)} + \frac{R_1+R_2}{L} & \frac{R+2R_3}{L(R+R_3)} \\ \frac{-R}{C(R+R_3)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{R_3 R I_{out}}{L(R+R_3)} - \frac{V_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} \\ \frac{R I_{out}}{C(R+R_3)} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Można rozpatrywać wersję uproszczoną w której pomija się rezystancje cewki, kondensatora i przełączania, wówczas kładziemy $R_1 = R_2 = R_3 = 0$. Funkcja przełączania u jest funkcją okresową, w rozpatrywanym przykładzie, przyjmujemy, że jej wartość jest zero dla pierwszej połowy okresu i jeden dla drugiej połowy, co matematycznie możemy wyrazić wzorem

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(\sin(\omega_s t))), \quad (25)$$

w środowisku Matlab możemy ją zdefiniować

$$u = @(t) (1 - \text{sign}(\sin(\omega_s * t))) / 2;$$

lub

$$u = @(t) (\sin(\omega_s * t) < 0);$$

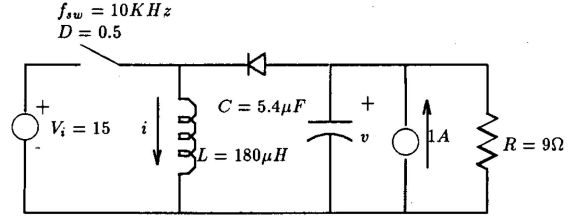
Zauważmy, że układ (21) możemy traktować jako niestacjonarny układ liniowy opisany równaniem

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x + \tilde{u}(t), \quad (26)$$

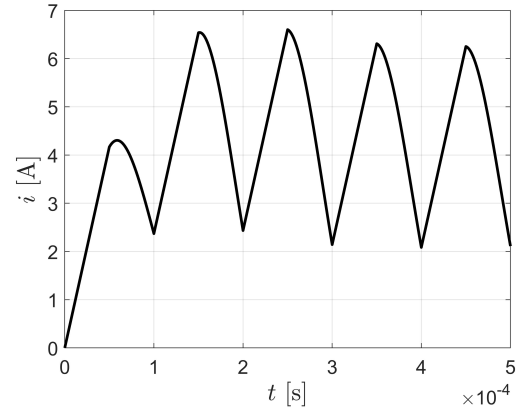
gdzie

$$\tilde{A}(t) = A + Bu(t), \quad \tilde{u}(t) = bu(t) + f. \quad (27)$$

Zauważmy, że (26) jest układem liniowym o współczynnikach okresowych (periodycznych), ponieważ $\tilde{A}(t)$ jest funkcją okresową. Wyznacz przebiegi natężenia prądu dławika i oraz napięcia v na kondensatorze w przedziale czasowym $[0, 0.003]$, częstotliwość przełączania $f_s = 40$ kHz.



Rysunek 15: szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem pojemnościowym [1].



Rysunek 16: szeregowy przekształtnik rezonansowy z obciążeniem napięciowym [1].

Zadanie 9. Przekształtnik DAB (ang. *Double Active Bridge*) jest opisany równaniami

$$L \frac{di}{dt} + iR = nv_{t1} - v_{t2} \quad (28a)$$

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + v_1 + r_1 C_1 \frac{dv_1}{dt} \quad (28b)$$

$$V_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + v_2 + r_2 C_2 \frac{dv_2}{dt} \quad (28c)$$

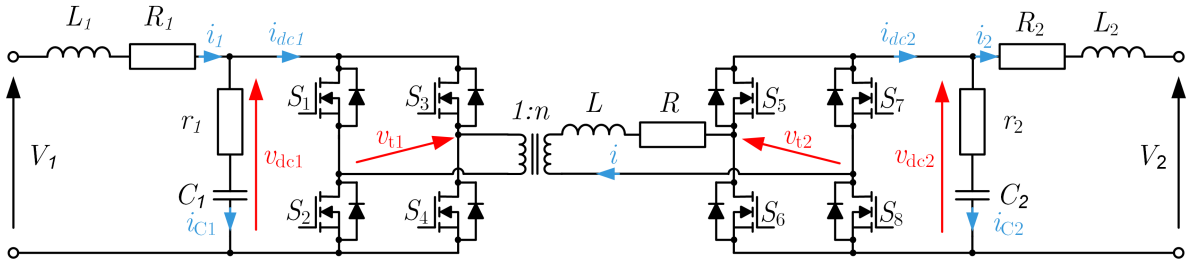
$$i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt} + nis_1 \quad (28d)$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt} - is_2 \quad (28e)$$

gdzie

$$v_{t1} = s_1 \left(v_1 + r_1 C_1 \frac{dv_1}{dt} \right), \quad (29a)$$

$$v_{t2} = s_2 \left(v_2 + r_2 C_2 \frac{dv_2}{dt} \right), \quad (29b)$$



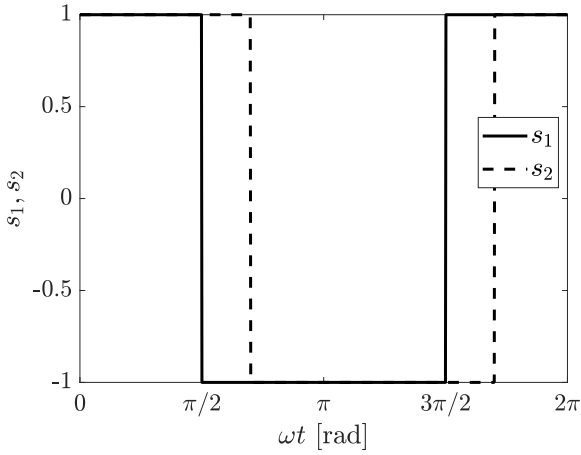
Rysunek 17: Schemat przekształtnika DAB.

natomiast x i b są wektorami

$$s_1(t) = \frac{1}{2} \{ \text{sgn}[\sin(\omega t + \phi_1/2)] - \text{sgn}[\sin(\omega t - \phi_1/2)] \}, \quad (30a)$$

$$s_2(t) = \frac{1}{2} \{ \text{sgn}[\sin(\omega t - \phi_3 + \phi_2/2)] - \text{sgn}[\sin(\omega t - \phi_3 - \phi_2/2)] \}. \quad (30b)$$

$$x = \begin{bmatrix} i \\ i_1 \\ i_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{V_1}{L_1} \\ \frac{V_2}{L_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$



Rysunek 18: Wykresy funkcji przełączających dla $f_s = 100$ kHz ($\omega = 2\pi f_s$ [rad/s]), oraz wartości kątów przesunięć fazowych $\phi_1 = \pi$, $\phi_2 = \pi$, $\phi_3 = \pi/5$.

Równania (28) i (29) możemy napisać w postaci

$$\frac{di}{dt} = -\frac{(R + n^2 s_1^2 r_1 + s_2^2 r_2) i}{L} + \frac{ns_1 v_1 - s_2 v_2 + ns_1 r_1 i_1 - s_2 r_2 i_2}{L} \quad (31a)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{-(R_1 + r_1) i_1 - v_1 - s_1 r_1 n i + V_1}{L_1} \quad (31b)$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{-(R_2 + r_2) i_2 - v_2 - s_2 r_2 i + V_2}{L_2} \quad (31c)$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{i_1 - n i s_1}{C_1} \quad (31d)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{i_2 + i s_2}{C_2} \quad (31e)$$

czyli

$$\dot{x} = Ax + b, \quad (32)$$

gdzie A jest zależną od czasu macierzą

$$\begin{bmatrix} \frac{(R + n^2 s_1^2 r_1 + s_2^2 r_2)}{L} & \frac{ns_1 r_1}{L} & -\frac{s_2 r_2}{L} & \frac{ns_1}{L} & -\frac{s_2}{L} \\ -\frac{s_1 r_1 n}{L_1} & -\frac{(R_1 + r_1)}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ -\frac{s_2 r_2}{L_2} & 0 & -\frac{(R_2 + r_2)}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{ns_1}{C_1} & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s_2}{C_2} & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Dla wartości parametrów $L = 100 \mu\text{H}$, $R = 1.0 \Omega$, $n = 6$, oraz

$$C_1 = 600 \mu\text{F}, \quad C_2 = 470 \mu\text{F} \quad (35a)$$

$$r_1 = 15 \text{ m}\Omega, \quad r_2 = 5 \text{ m}\Omega \quad (35b)$$

$$L_1 = 5 \mu\text{H}, \quad L_2 = 50 \mu\text{H} \quad (35c)$$

$$R_1 = 20 \text{ m}\Omega, \quad R_2 = 150 \text{ m}\Omega \quad (35d)$$

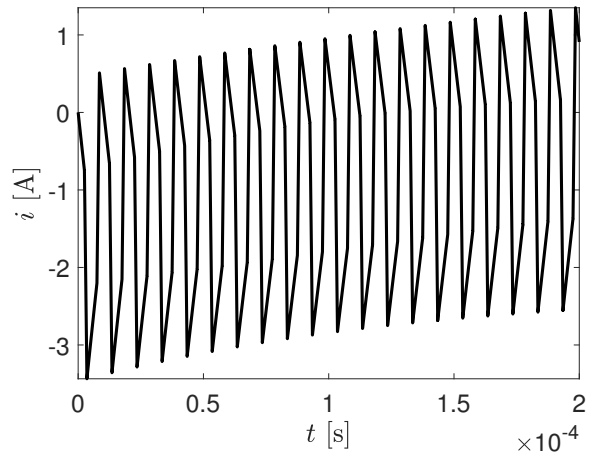
$$V_1 = 20 \text{ V}, \quad V_2 = 150 \text{ V} \quad (35e)$$

wyznacz przebiegi zmiennych stanu na przedziale od 0 do 2×10^{-4} s. przyjmując częstotliwość przełączania (ang. *switching frequency*) $f_s = 100$ kHz, oraz wartości kątów przesunięć fazowych $\phi_1 = \pi$, $\phi_2 = \pi$, $\phi_3 = \pi/5$, oraz warunek początkowy

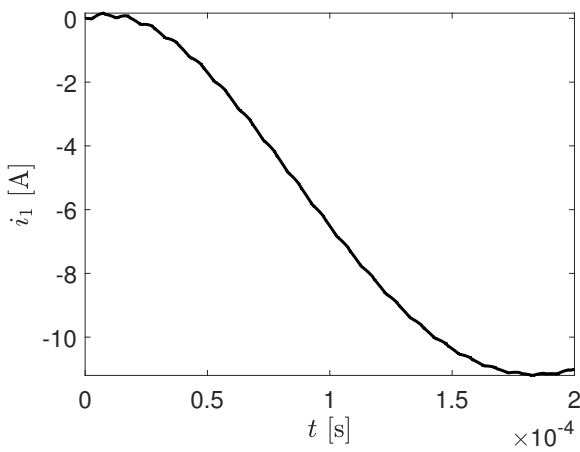
$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Wygeneruj wykresy funkcji przełączających na przedziale $[0, 2T]$, gdzie $T = 1/f_s$.

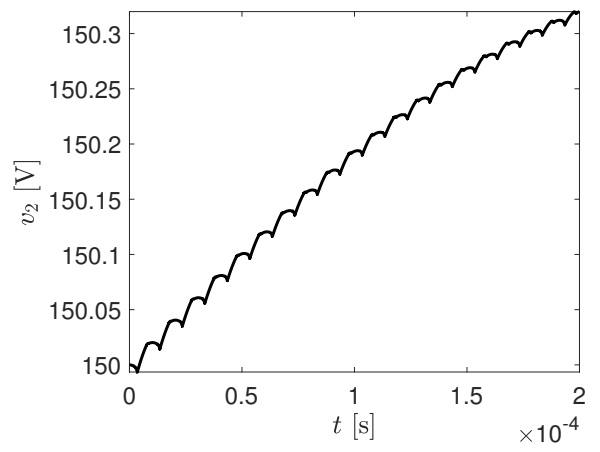
Przekształtnik DAB opisany równaniem (32) jest przykładem tzw. układu LTP (ang. *Linear-Time-Periodic*), czyli układu **liniowego** o współczynnikach zmieniających się okresowo (periodycznie) w czasie. Modelowanie i sterowanie przekształtników DAB, czy szerzej układów LTP, należy do aktywnych obszarów badawczych [2, 3].



Rysunek 19: Przebieg natężenia prądu i transformatora w przekształtniku DAB.



Rysunek 20: Przebieg natężenia prądu i_1 w przekształtniku DAB.



Rysunek 23: Przebieg wartości napięcia v_2 w przekształtniku DAB.

2 Schematy całkowania numerycznego

Ogólny schemat całkowania równań różniczkowych

$$\dot{x} = f[t, x(t)] \quad (37)$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = x_{\text{init}} \quad (38)$$

ma postać:

```

for  $t = 0 : T : t_f - T$ 
    znajdź aproksymację  $I(t) \approx \int_t^{t+T} f[t, x(t)] dt$ 
     $x(t + T) = x(t) + I(t)$ 
end

```

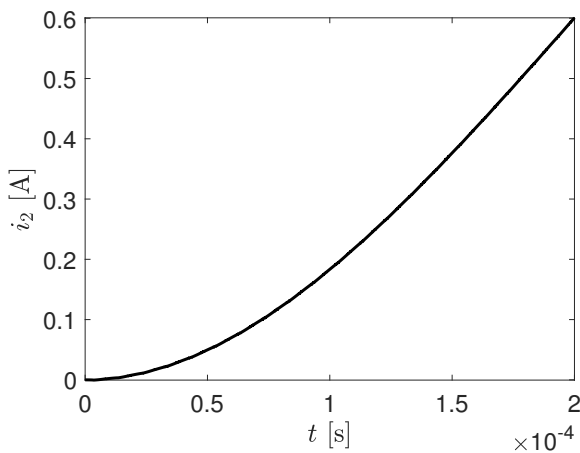
Istnieje wiele schematów krokowych całkowania numerycznego, poniżej wymieniamy kilka z nich.

2.1 Schemat całkowania prostokątnego

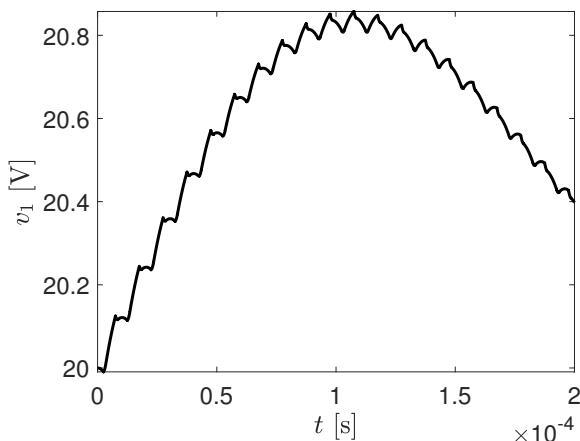
```

for  $t = 0 : T : t_f - T$ 
     $x(t + T) = x(t) + Tf[t, x(t)]$ 
end

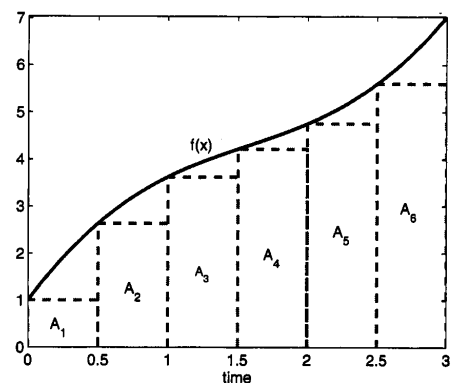
```



Rysunek 21: Przebieg natężenia prądu i_2 w przekształtniku DAB.



Rysunek 22: Przebieg wartości napięcia v_1 w przekształtniku DAB.



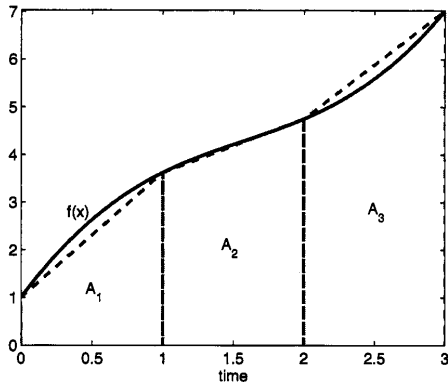
Rysunek 24: Ilustracja całkowania prostokątnego. Mamy $\dot{x} = f(x)$, zatem $x(t)$ jest powierzchnią pod wykresem $f(x)$. Powierzchnię tę przybliżamy (aproksymujemy) sumą pól prostokątów A_i , tzn., $x(0.5) \approx A_1$, $x(1.0) \approx A_1 + A_2$, ... Źródło: [4].

2.2 Schemat całkowania trapezowego

```

for t = 0 : T : t_f - T
    Δx1 = Tf[t, x(t)]
    Δx2 = Tf[t + T, x(t) + Δx1]
    x(t + T) = x(t) + (Δx1 + Δx2)/2
end

```



Rysunek 25: Ilustracja całkowania trapezowego. Mamy $\dot{x} = f(x)$, zatem $x(t)$ jest powierzchnią pod wykresem $f(x)$. Powierzchnię tę przybliżamy sumą pól trapezów A_i , tzn. $x(1.0) \approx A_1$, $x(2.0) \approx A_1 + A_2, \dots$ Źródło: [4].

2.3 Schemat całkowania Rungego–Kutty czwartego rzędu

```

for t = 0 : T : t_f - T
    Δx1 = Tf[t, x(t)]
    Δx2 = Tf[t + T/2, x(t) + Δx1/2]
    Δx3 = Tf[t + T/2, x(t) + Δx2/2]
    Δx4 = Tf[t + T, x(t) + Δx3]
    x(t + T) = x(t) + (Δx1 + 2Δx2 + 2Δx3 + Δx4)/6
end

```

Zadanie 10. (Źródło: [4]) Obwód szeregowy RLC jest opisany równaniami

$$u = iR + L \frac{d}{dt} i + v_c, \quad (38a)$$

$$i = C \dot{v}_c, \quad (38b)$$

gdzie u oznacza napięcie źródła, i oznacza natężenie prądu płynącego w obwodzie, zaś v_c oznacza napięcie na kondensatorze.

- Napisz równania stanu dla tego układu przyjmując x_1 jako napięcie na kondensatorze oraz x_2 jako natężenie prądu.
- Założymy, że $R = 3$, $L = 1$, $C = 1/2$. Znajdź ścisły wzór określający wartość napięcia na kondensatorze dla $t \geq 0$, przy założeniu zerowych warunków początkowych oraz $u(t) = e^{-2t}$.
- Przeprowadź symulacje numeryczne układu stosując schematy całkowania: prostokątny, trapezowy, Rungego–Kutty czwartego rzędu, aby znaleźć rozwiązanie numeryczne dla napięcia na kondensatorze. Symulacje przeprowadź na przedziale od $t = 0$ do $t = 5$ używając wartości kroku 0.1 oraz 0.2. Porównując znalezione rozwiązania z rozwiązaniem ścisłym znajdź wartość błędu średniokwadratowego (RMS value, funkcja `rms`) dla każdej

z sześciu symulacji, porównaj otrzymane wyniki treścią Tabeli 1.

Uwaga: dla wszystkich wielkości fizycznych występujących w zadaniu przyjmujemy jednostki umowne.

Szkic rozwiązania

- Oznaczając $x_1(t) = v_c(t)$, $x_2(t) = i(t)$, po przekształceniu otrzymujemy

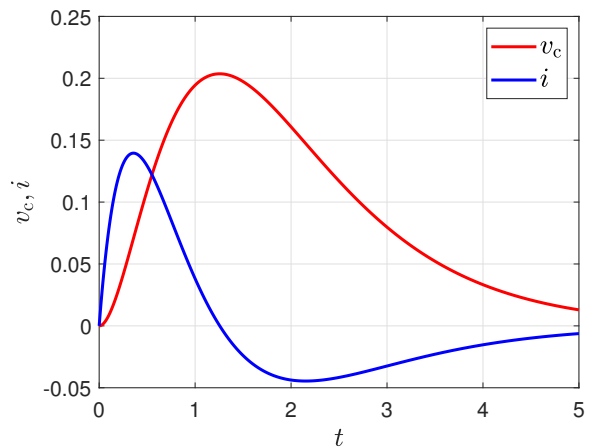
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u. \quad (39)$$

- Rozwiązanie ścisłe dla warunków początkowych $v_c(0) = 0$, $i(0) = 0$ oraz $R = 3$, $L = 1$, $C = 1/2$ ma postać

$$V_c(t) = 2e^{-t} - 2(1+t)e^{-2t}, \quad (39a)$$

$$I(t) = -e^{-t} + (1+2t)e^{-2t}. \quad (39b)$$

- Przykładowy kod dla całkowania prostokątnego przedstawiono na Listingu 4.



Rysunek 26: Wykres napięcia v_c na kondensatorze i natężenia prądu i w obwodzie [Zadanie 10].

Tabela 1: Błąd średniokwadratowy (RMS) przebiegów napięcia i natężenia prądu dla schematów całkowania: 1 – prostokątnego, 2 – trapezowego, 3 – Rungego–Kutty 4-go rzędu. [Zadanie 10]

#	błąd RMS			
	i		v_c	
	$T = 0.1$	$T = 0.2$	$T = 0.1$	$T = 0.2$
1	0.0114	0.0269	0.0163	0.0354
2	9.9215e-04	0.0049	8.5268e-04	0.0042
3	2.8984e-06	5.7159e-05	2.6819e-06	5.3201e-05

Listing 4.

```
close all
clear
clc
nfontslatex = 18;
nfonts = 14;

volC = @(t) 2*exp(-t)-2*(1+t).*exp(-2*t);
cirCurr = @(t) -exp(-t)+(1+2*t).*exp(-2*t);
tInit = 0.0;
tFinal = 5.0;

figure % plots of voltage and current
T = 0.01;
t = tInit:T:tFinal;
plot(t,volC(t),'r',t,cirCurr(t),'b', ...
      'LineWidth', 2.0)
set(gca,'FontSize',nfonts);
xlabel('$t$', 'Interpreter', 'Latex', ...
      'FontSize', nfontslatex)
ylabel('$v_{\{\rm c\}}$,i$', ...
      'Interpreter', 'Latex', ...
      'FontSize', nfontslatex)
grid on
legend({'$v_{\{\rm c\}}$', '$i$'}, ...
      'Interpreter', 'Latex', ...
      'FontSize', nfontslatex, 'Location', 'NorthEast')
print('voltageAndCurrentPlots.eps', '-depsc', '-r600')
print('voltageAndCurrentPlots.jpg', '-djpeg', '-r600')
print('voltageAndCurrentPlots.pdf', '-dpdf', '-r600')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

R = 3.0; L = 1.0; C=0.5;
A = [0 1/C; -1/L -R/L];
B = [0; 1/L];
u = @(t) exp(-2*t);
f = @(t,x) A*x+B*u(t);
xInit = [0; 0];

T = 0.1; % integration step size
t = tInit:T:tFinal;
N = length(t);
X = zeros(2,N);
X(:,1) = xInit;

% rectangular integration
for k=1:N-1
    X(:,k+1) = X(:,k) + T*f(t(k),X(:,k));
end

rmsX1 = rms(X(1,:)-volC(t),2);
rmsX2 = rms(X(2,:)-cirCurr(t),2);
```

Literatura

- [1] S.R Sanders, J.M Noworolski, X.Z Liu, and G.C Verghese. Generalized averaging method for power conversion circuits. *IEEE transactions on power electronics*, 6(2):251–259, 1991.
- [2] Sayandev Ghosh, Dhiman Das, Bhim Singh, S. Janardhanan, and Sukumar Mishra. Frequency-domain modeling of dual-active-bridge converter based on harmonic balance approach. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Industrial Electronics*, 3(1):166–176, 2022.
- [3] Jianheng Lin, Mei Su, Yao Sun, Xing Li, Shiming Xie, Guanguan Zhang, Frede Blaabjerg, and Jianghua Feng. Accurate loop gain modeling of digitally controlled buck converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 69(1):725–739, 2022.
- [4] D. Simon. *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, 2006.