

**1DE2150:A - Modele i identyfikacja układów dynamicznych, lab.  
Metoda najmniejszych kwadratów w identyfikacji modeli statycznych**

Maciej Twardy

Materiał przygotowany w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój - Współpraca”.  
Projekt współfinansowany przez Unie Europejska w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego. Program  
Operacyjny Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020, Os priorytetowa III Szkolnictwo Wyższe dla gospodarki  
i rozwoju, Działanie 3.5 Kompleksowe programy szkół wyższych.

## 1 Metoda najmniejszych kwadratów

Rozpatrujemy równanie

$$Ax = y, \quad (1)$$

gdzie  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , oraz  $\text{rank } A = n$ , tzn. macierz  $A$  jest pełnego rzędu kolumnowego, czyli ma liniowo niezależne kolumny. Przypomnijmy, że jeśli  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  to

$$(\text{rank } A = n) \iff (Ax = 0 \iff x = 0), \quad (2)$$

Wówczas mamy również  $\det(A^T A) \neq 0$ . Załóżmy, że równanie (1) ma rozwiązanie, wówczas możemy pomnożyć obie strony lewostronnie przez macierz  $A^T$

$$A^T Ax = A^T y, \quad (3)$$

a następnie wyznaczyć

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y. \quad (4)$$

Wzór (4) daje nam dokładne rozwiązanie równania (1) pod warunkiem, że rozwiązanie takie istnieje oraz macierz  $A$  jest pełnego rzędu kolumnowego. Jeżeli macierz  $A$  nie jest pełnego rzędu kolumnowego, to  $\det(A^T A) = 0$ , zatem nie istnieje odwrotność macierzy  $A^T A$  i wzór (4) nie ma sensu. Można postawić pytanie, jaki sens ma wzór (4), jeżeli macierz  $A$  ma pełen rząd kolumnowy ale równocześnie (1) jest układem sprzecznym i nie istnieje jego rozwiązanie. Okazuje się, że w takim przypadku,  $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$  jest minimalizatorem wyrażenia  $\|Ax - y\|^2$ . Mówimy też, że  $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$  jest przybliżonym rozwiązaniem w sensie najmniejszych kwadratów równania (1) (ang. *LS solution*, gdzie *LS* pochodzi od *least squares*). Możemy się o tym przekonać w następujący sposób. Zaczniemy od tego, że

$$\begin{aligned} \|Ax - y\|^2 &= [Ax - y]^T [Ax - y] \\ &= [x^T A^T - y^T] [Ax - y] \\ &= x^T A^T Ax - 2y^T Ax + y^T y. \end{aligned} \quad (5)$$

Dla ustalonych  $A$  i  $y$ , dowolny wektor  $x$  możemy napisać w postaci sumy  $x = (A^T A)^{-1} A^T y + \xi$  (gdzie  $\xi$  jest pewnym wektorem), mamy wówczas  $x^T = y^T A (A^T A)^{-1} + \xi^T$  oraz dalej

$$\begin{aligned} \|Ax - y\|^2 &= x^T A^T Ax - 2y^T Ax + y^T y \\ &= [y^T A (A^T A)^{-1} + \xi^T] A^T A [(A^T A)^{-1} A^T y + \xi] \\ &\quad - 2y^T A [(A^T A)^{-1} A^T y + \xi] + y^T y \\ &= -y^T A (A^T A)^{-1} A^T y + y^T y + \xi^T A^T A \xi. \end{aligned} \quad (6)$$

$$= -y^T A (A^T A)^{-1} A^T y + y^T y + \xi^T A^T A \xi. \quad (7)$$

Zauważmy, że wyrazy  $-y^T A (A^T A)^{-1} A^T y$  i  $y^T y$  są stałe, natomiast dla  $\xi^T A^T A \xi$  możemy przeprowadzić następującą analizę. Oznaczmy  $A\xi = v$ , ponieważ  $\text{rank } A = n$  to  $A\xi = 0 \iff \xi = 0$ , mamy zatem

$$\xi^T A^T A \xi = [A\xi]^T A\xi = v^T v = \|v\|^2 \geq 0, \quad (8)$$

równocześnie

$$\|v\|^2 = 0 \iff v = 0. \quad (9)$$

Zatem najmniejsza wartość wyrażenia  $\xi^T A^T A \xi$  wynosi 0 i jest osiągana tylko dla  $\xi = 0$ . Zatem dla  $x = (A^T A)^{-1} A^T y + \xi$  wyrażenie  $\|Ax - y\|^2$  osiąga najmniejszą wartość dla  $\xi = 0$  czyli faktycznie  $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$  jest minimalizatorem wyrażenia  $\|Ax - y\|^2$ .

## 2 Pseudoinwersja Moore'a-Penrose'a

Zakładamy, że  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rank } A = r \leq \min(m, n)$ . Korzystając z rozkładu SVD możemy napisać

$$A = U \Sigma V^T, \quad (10)$$

gdzie

$$U \in \mathbb{R}^{m \times r}, \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad V \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad (11)$$

$$U^T U = I_r, \quad V^T V = I_r, \quad (12)$$

oraz

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0. \quad (13)$$

Liczba  $r$  jest rzędem macierzy  $A$ . Zdefiniujemy macierze

$$\tilde{U} = [U \ U_\perp] \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \tilde{V} = [V \ V_\perp] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (14)$$

takie, że

$$\tilde{U}^T \tilde{U} = I_m, \quad \tilde{V}^T \tilde{V} = I_n. \quad (15)$$

Wynika stąd, że

$$U^T U_\perp = 0, \quad U_\perp^T U_\perp = I_{m-r}, \quad (16)$$

$$V^T V_\perp = 0, \quad V_\perp^T V_\perp = I_{n-r}, \quad (17)$$

Definiując

$$\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (18)$$

możemy napisać

$$\begin{aligned} \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^T &= [U \ U_\perp] \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V \ V_\perp]^T \\ &= [U \ U_\perp] \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T \\ V_\perp^T \end{bmatrix} \\ &= U \Sigma V^T. \end{aligned} \quad (19)$$

Dla  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , o rozkładzie SVD  $A = U \Sigma V^T$  definiujemy pseudoodwrotność Moore'a-Penrose'a wzorem

$$A^\dagger = V \Sigma^{-1} U^T, \quad (20)$$

gdzie

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_r \end{bmatrix}. \quad (21)$$

**Lemat 1.** Niech  $\hat{x} = A^\dagger y$ . Wówczas

1. Wektor  $\hat{x} = A^\dagger y$  jest minimalizatorem wyrażenia  $\|Ax - y\|_2^2$ .

2. Dla każdego  $z$  takiego, że

$$\|A\hat{x} - y\| = \|Az - y\| \quad (22)$$

zachodzi

$$\|\hat{x}\| \leq \|z\| \quad (23)$$

Dowód. Część pierwsza.

$$\begin{aligned} \|A(\hat{x} + \xi) - y\|^2 &= [A(\hat{x} + \xi) - y]^T [A(\hat{x} + \xi) - y] \\ &= [A(A^\dagger y + \xi) - y]^T [A(A^\dagger y + \xi) - y] \\ &= [(AA^\dagger - I)y + A\xi]^T [(AA^\dagger - I)y + A\xi] \\ &= [(AA^\dagger - I)y]^T [(AA^\dagger - I)y] \\ &\quad + 2[(AA^\dagger - I)y]^T A\xi + [A\xi]^T [A\xi] \quad (24) \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= U\Sigma V^T V \Sigma^{-1} U^T U \Sigma V^T \\ &= U\Sigma V^T \\ &= A \quad (25) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (AA^\dagger A)^T &= (U\Sigma V^T V \Sigma^{-1} U^T)^T \\ &= (UU^T)^T \\ &= UU^T \quad (26) \end{aligned}$$

zatem

$$(AA^\dagger)^T A = UU^T U \Sigma V^T = U \Sigma V^T = A. \quad (27)$$

Wynika stąd, że

$$(AA^\dagger - I)^T A = 0, \quad (28)$$

a zatem z (24) wynika, że

$$\|A(\hat{x} + \xi) - y\|^2 = \|A\hat{x} - y\|^2 + \|A\xi\|^2 \geq \|A\hat{x} - y\|^2 \quad (29)$$

dla każdego  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , czyli  $\hat{x} = A^\dagger y$  jest minimalizatorem wyrażenia  $\|Ax - y\|$ , gdyż dla każdego  $x$  można znaleźć takie  $\xi$ , że  $x = \hat{x} + \xi$ . To kończy dowód pierwszej części lematu.

Przeprowadzając dowód drugiej części lematu skorzystamy z faktu, że

$$A\xi = 0 \iff (A^\dagger)^T \xi = 0, \quad (30)$$

który można łatwo wykazać, korzystając z rozkładu SVD. Z jednej strony mamy

$$\begin{aligned} A\xi = 0 &\implies \\ U\Sigma V^T = 0 &\implies \\ \Sigma^{-1} U^T U \Sigma V^T \xi = \Sigma^{-1} U^T 0 &\implies \\ V^T \xi = 0 &\implies \\ U \Sigma^{-1} V^T \xi = 0 &\implies \\ (V \Sigma^{-1} U^T)^T \xi = 0 &\implies \\ (A^T)^T \xi = 0. &\quad (31) \end{aligned}$$

z drugiej strony

$$\begin{aligned} (A^T)^T \xi = 0 &\implies \\ (V \Sigma^{-1} U^T)^T \xi = 0 &\implies \\ U \Sigma^{-1} V^T \xi = 0 &\implies \\ \Sigma U^T U \Sigma^{-1} V^T \xi = \Sigma U^T 0 &\implies \\ V^T \xi = 0 &\implies \\ U \Sigma V^T \xi = U \Sigma 0 &\implies \\ A\xi = 0. &\quad (32) \end{aligned}$$

Dla dowolnego  $z \in \mathbb{R}^n$  istnieje  $\xi \in \mathbb{R}^n$  taki, że  $z = \hat{x} + \xi$ . Z dowodu pierwszej części lematu wiemy, że

$$\begin{aligned} \|Az - y\|^2 &= \|A(\hat{x} + \xi) - y\|^2 \\ &= \|A\hat{x} - y\|^2 + \|A\xi\|^2 \quad (33) \end{aligned}$$

zatem

$$\|Az - y\|^2 = \|A\hat{x} - y\|^2 \quad (34)$$

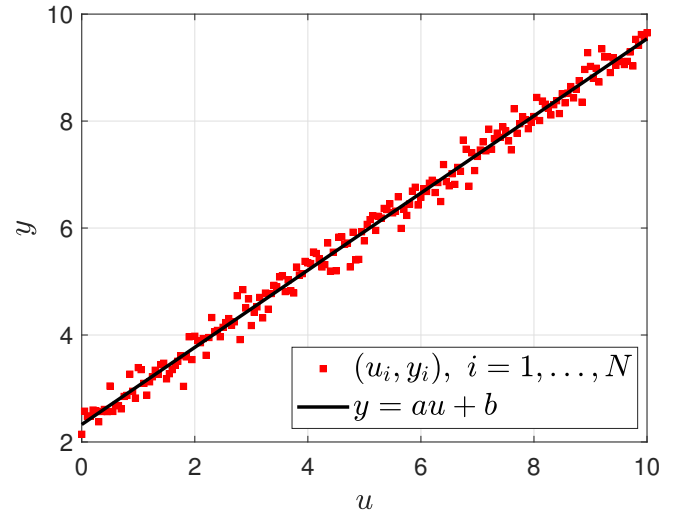
wtedy i tylko wtedy, gdy  $A\xi = 0$ . Zatem mamy

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \|\hat{x} + \xi\|^2 \\ &= \|A^\dagger y + \xi\|^2 \\ &= [A^\dagger y + \xi]^T [A^\dagger y + \xi] \\ &= \|A^\dagger y\|^2 + 2 \underbrace{\xi^T A^\dagger y}_{=0} + \|\xi\|^2 \\ &= \|\hat{x}\|^2 + \|\xi\|^2 \\ &\geq \|\hat{x}\|^2. \quad (35) \end{aligned}$$

### 3 Zadanie regresji liniowej

Zadanie regresji liniowej polega na możliwie najlepszym dopasowaniu prostej  $y = au + b$  do pewnego zbioru punktów

$$\{(u_1, y_1), \dots, (u_N, y_N)\}. \quad (36)$$



Rysunek 1: Prosta regresji liniowej.

Najlepsze dopasowanie jest rozumiane jako minimalizacja sumy

$$\sum_{i=1}^N (au_i + b - y_i)^2 \quad (37)$$

względem parametrów  $a$  i  $b$ .

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (au_i + b - y_i)^2 &= \begin{bmatrix} au_1 + b - y_1 \\ au_2 + b - y_2 \\ \vdots \\ au_N + b - y_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} au_1 + b - y_1 \\ au_2 + b - y_2 \\ \vdots \\ au_N + b - y_N \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} u_1 & 1 \\ u_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \right)^T \left( \begin{bmatrix} u_1 & 1 \\ u_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Oznaczając

$$x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u_1 & 1 \\ u_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_N & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad (38)$$

możemy napisać

$$\sum_{i=1}^N (au_i + b - y_i)^2 = [Ax - y]^T [Ax - y] = \|Ax - y\|_2^2. \quad (39)$$

Zatem zadanie dopasowania prostej do danego zbioru punktów sprawdza się do

$$\underset{x}{\text{minimize}} \quad \|Ax - y\|_2^2. \quad (40)$$

Można wykazać, że spośród wszystkich minimalizatorów wyrażenia  $\|Ax - y\|_2$  ten, który sam ma najmniejszą normę, wyraża się wzorem

$$\hat{x} = A^\dagger y \quad (41)$$

gdzie  $A^\dagger$  oznacza pseudoodwrotność Moore'a-Penrose'a macierzy  $A$  (w środowisku Matlab można ją wyznaczyć za pomocą funkcji `pinv`).

## 4 Metoda największej wiarygodności

Metoda największej wiarygodności (ang. *ML, maximum likelihood method*) może być traktowana jako uogólnienie klasycznego zadania najmniejszych kwadratów. W metodzie tej przyjmujemy, że najbardziej wiarygodnym modelem otrzymanym na podstawie danych jest ten, dla którego suma kwadratów reszduów (reszt) przyjmuje najmniejszą wartość. Zakładamy, że model jest opisany pewną funkcją  $f(x, u)$ , gdzie  $x$  jest wektorem parametrów modelu. Zależność między sygnałem wejściowym a sygnałem wyjściowym jest opisana zależnością

$$y_i = f(x, u_i) + r_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (42)$$

gdzie  $r_i$  jest różnicą między odpowiedzią układu przewidzianą przez model (predykcją) dla sygnału wejściowego  $u_i$  a wartością zmierzoną  $y_i$ , tzn.

$$r_i = f(x, u_i) - y_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (43)$$

W zapisie macierzowym

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}}_R = \underbrace{\begin{bmatrix} f(x, u_1) \\ \vdots \\ f(x, u_N) \end{bmatrix}}_{F(x,U)} - \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_Y \quad (44)$$

czyli

$$R = F(x, U) - Y. \quad (45)$$

W metodzie LM wybieramy taki wektor parametrów  $x$  dla którego  $\|R\|_2^2$  osiąga minimum, innymi słowy minimalizujemy względem  $x$  wyrażenie

$$\|F(x, U) - Y\|_2^2. \quad (46)$$

Jeżeli model  $F(x, U)$  jest liniowy względem parametrów  $x$ , tzn. dla dowolnych  $x^{(1)}, x^{(2)}$  oraz dowolnych skalarów  $\alpha_1, \alpha_2$  zachodzi

$$F(\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)}, U) = \alpha_1 F(x^{(1)}, U) + \alpha_2 F(x^{(2)}, U), \quad (47)$$

to można znaleźć macierz  $A(U)$  taką, że

$$F(x, U) = A(U)x. \quad (48)$$

Wówczas mamy

$$\|R\|_2^2 = \|F(x, U) - Y\|_2^2 = \|A(U)x - Y\|_2^2. \quad (49)$$

W takiej sytuacji, wektor parametrów  $\hat{x}$  dla którego  $\|R\|_2^2$  osiąga minimum jest dany wzorem

$$\hat{x} = [A(U)]^\dagger Y. \quad (50)$$

Więcej informacji na temat metody najmniejszych kwadratów można znaleźć np. w [1, 2, 3, 4].

## 5 Zadania

**Zadanie 1.** Przymocowaną do sufitu sprężynę o współczynniku sprężystości  $k$  obciążano różnymi ciężarkami o masie  $m$  za każdym razem mierząc długość  $l$  sprężyny. Wykonano  $N = 8$  pomiarów. Wyniki przedstawia Tabela 1.

Tabela 1

$k$	$m_k$ [kg]	$l_k$ [m]
1	0.2	0.062
2	0.3	0.065
3	0.4	0.068
4	0.5	0.077
5	0.6	0.085
6	0.7	0.087
7	0.8	0.094
8	0.9	0.105

Zgodnie z prawem Hooke'a

$$mg = k(l - l_0), \quad (51)$$

gdzie  $g$  oznacza przyspieszenie ziemskie,  $l_0$  oznacza długość sprężyny nie obciążonej (długość swobodną). Metodą najmniejszych kwadratów dopasuj prostą

$$l = l_0 + \frac{mg}{k} \quad (52)$$

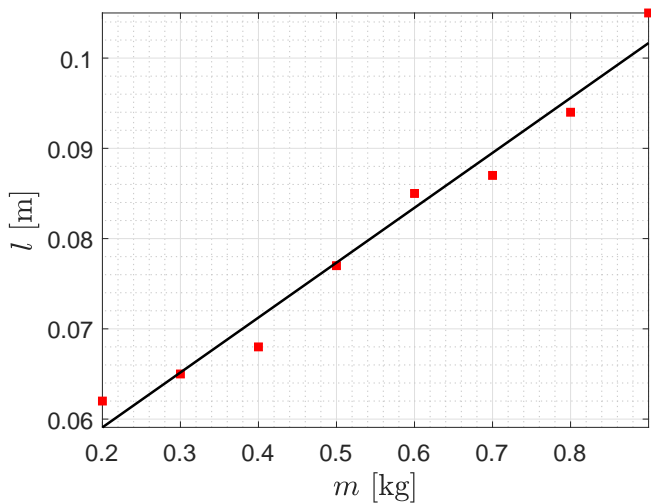
do danych pomiarowych z Tabeli 1. Wykonaj odpowiedni wykres (Rys. 2). Przyjmując  $g = 9.81 \left[ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \right]$ , znajdź estymaty długości swobodnej  $l_0$  oraz współczynnika sprężystości  $k$ .

*Wskazówka 1* Zgodnie z (52) mamy

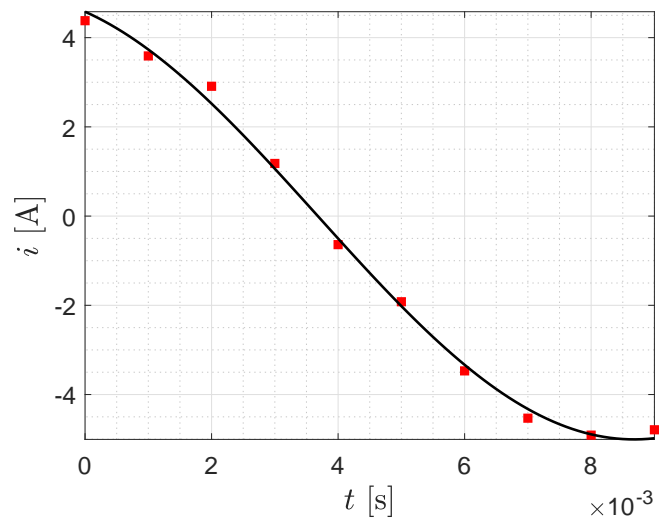
$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_N \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & m_N \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} l_0 \\ \frac{g}{k} \end{bmatrix}}_x, \quad (53)$$

zatem po wyznaczeniu  $\hat{x} = A^\dagger Y$  możemy obliczyć estymaty parametrów  $\hat{l}_0$  i  $\hat{k}$ .

(Rozwiązanie:  $\hat{k} = 161.26[\text{N/m}]$ ,  $\hat{l}_0 = 0.0469[\text{m}]$ )



**Rysunek 2:** Dopasowanie zależności  $l = l_0 + \frac{mg}{k}$  do danych pomiarowych.



**Rysunek 3:** Dopasowanie zależności  $i(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$  dla pulsacji  $\omega = 100\pi$  [rad/s].

**Zadanie 2.** W obwodzie płynie prąd sinusoidalny

$$i(t) = U \cos(\omega t + \varphi), \quad (54)$$

o pulsacji  $\omega = 100\pi$  [rad/s]. Zmierzono wartość natężenia prądu  $i(t)$  w kilku kolejnych chwilach czasowych, wyniki pomiarów przedstawia Tabela 2.

**Tabela 2**

$k$	$t_k$ [s]	$i_k$ [A]
1	0	4.38
2	0.001	3.59
3	0.002	2.91
4	0.003	1.18
5	0.004	-0.64
6	0.005	-1.92
7	0.006	-3.47
8	0.007	-4.53
9	0.008	-4.91
10	0.009	-4.79

Metodą najmniejszych kwadratów znajdź wartość amplitudy  $U$  i przesunięcia fazowego  $\varphi$  a następnie wykonaj odpowiedni wykres (Rys. 3).

*Wskazówka 1* możesz skorzystać z zależności

$$U \cos(\omega t + \varphi) = V \cos(\omega t) + W \sin(\omega t), \quad (55)$$

$$U = \sqrt{V^2 + W^2}, \quad \varphi = \arccos\left(\frac{V}{\sqrt{V^2 + W^2}}\right). \quad (56)$$

Innymi słowy, znajdź najpierw wartości współczynników  $V$  i  $W$  w

$$i(t) = V \cos(\omega t) + W \sin(\omega t). \quad (57)$$

(Rozwiązanie:  $\hat{A} = 5.0058$ [V],  $\hat{\varphi} = 0.4147$ [rad])

**Zadanie 3.** Z wysokości kilkunastu metrów zrzucano kamień. Położenie kamienia zmierzono w kolejnych chwilach czasowych. Wyniki tych pomiarów przedstawia Tabela 3.

**Tabela 3**

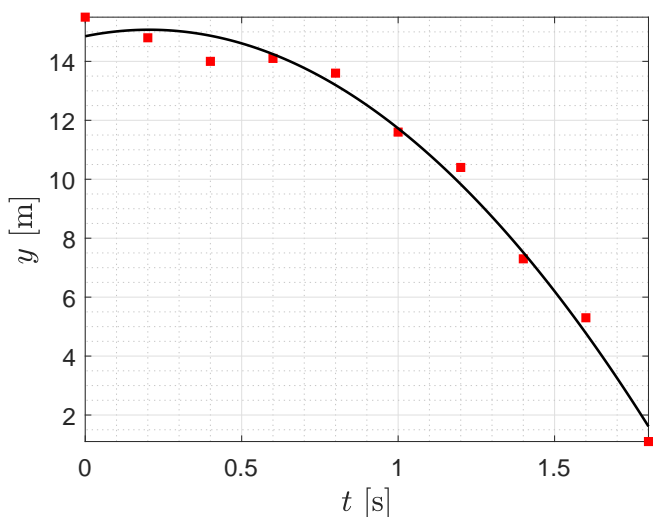
$k$	$t_k$ [s]	$y_k$ [m]
1	0.0	15.5
2	0.2	14.8
3	0.4	14.0
4	0.6	14.1
5	0.8	13.6
6	1.0	11.6
7	1.2	10.4
8	1.4	7.3
9	1.6	5.3
10	1.8	1.1

Z mechaniki wiadomo, że położenie swobodnie spadającego ciała wyraża się zależnością

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (58)$$

gdzie  $y_0$  oznacza położenie początkowe,  $v_0$  oznacza prędkość początkową (jej składową pionową). Metodą najmniejszych kwadratów oszacuj początkową wysokość kamienia  $y_0$ , jego początkową prędkość  $v_0$  oraz przyspieszenie ziemskie  $g$ , a następnie wykonaj odpowiedni wykres (Rys. 4).

(Rozwiązanie:  $\hat{y}_0 = 14.8528$ [m],  $\hat{v}_0 = 2.1568$ [m/s],  $\hat{g} = 10.5682$ [m/s<sup>2</sup>])



Rysunek 4: Dopasowanie zależności  $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ .

**Zadanie 4.** [3] Przy badaniu wpływu temperatury  $t$  na chód zegara  $\omega$  otrzymano wyniki podane w Tabeli 4.

Tabela 4

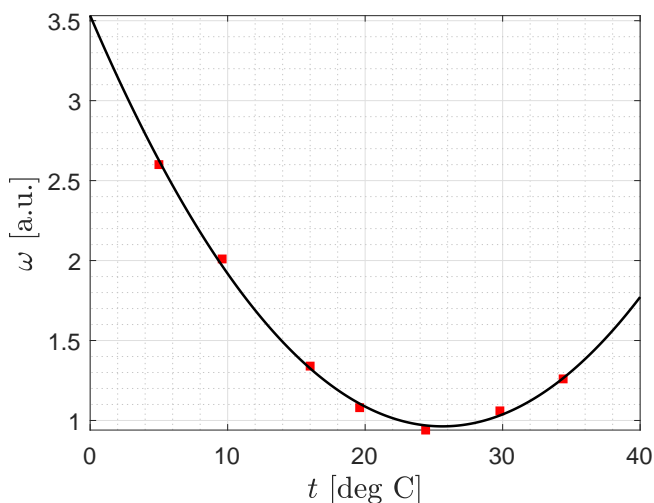
$k$	$t_k$ [deg C]	$\omega_k$
1	5.0	2.60
2	9.6	2.01
3	16.0	1.34
4	19.6	1.08
5	24.4	0.94
6	29.8	1.06
7	34.4	1.26

Przyjmując, że prawdziwa jest zależność

$$\omega = a_0 + a_1(t - 15) + a_2(t - 15)^2, \quad (59)$$

wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów estymaty współczynników  $a_0$ ,  $a_1$  oraz  $a_2$ , a następnie wykonać odpowiedni wykres (Rys. 5).

(Rozwiązanie:  $\hat{a}_0 = 1.4046$ ,  $\hat{a}_1 = -0.0831$ ,  $\hat{a}_2 = 0.0039$ )



Rysunek 5

**Zadanie 5.** [3] W Tabeli 5 podano wskazania aneroidu  $U$  i barometru rtęciowego  $W$  przy różnych temperaturach  $t$ .

Tabela 5

$k$	$t_k$ [°C]	$U_k$ [mm]	$W_k$ [mm]
1	10.0	749.0	744.4
2	6.2	746.1	741.3
3	6.3	756.6	752.7
4	5.3	758.9	754.7
5	4.8	751.7	747.9
6	3.8	757.5	754.0
7	17.1	752.4	747.8
8	22.2	752.5	748.6
9	20.8	752.2	747.7
10	21.0	759.5	755.6

Metodą najmniejszych kwadratów wyznacz współczynniki  $a_0$ ,  $a_1$  oraz  $a_2$  dla wzoru wyrażającego zależność  $W$  od  $t$  i  $U$

$$W = U + a_0 + a_1 t + a_2(760 - U). \quad (60)$$

(Rozwiązanie:  $\hat{a}_0 = -3.6249$ ,  $\hat{a}_1 = -0.0101$ ,  $\hat{a}_2 = -0.0671$ )

**Zadanie 6.** [3] Wyniki pomiarów oporu elektrycznego  $\rho$  molibdenu w zależności od temperatury  $T$  zebrano w Tabeli 6.

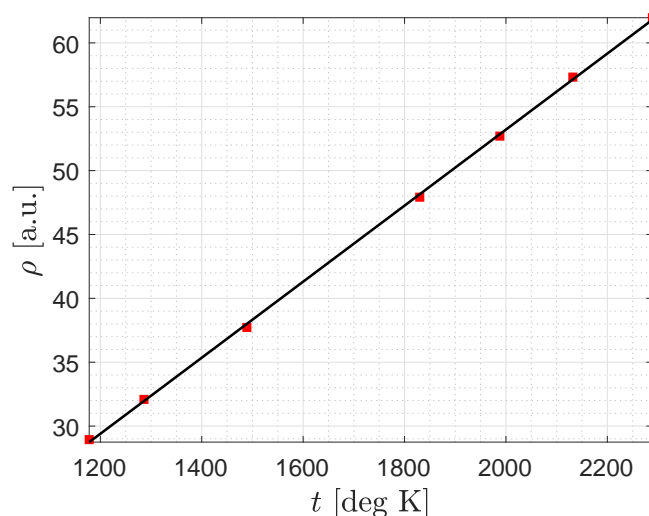
Tabela 6

$k$	$T_k$ [°K]	$\rho_k$
1	2289	61.97
2	2132	57.32
3	1988	52.70
4	1830	47.92
5	1489	37.72
6	1286	32.09
7	1178	28.94

Metodą najmniejszych kwadratów wyznacz współczynniki  $a_0$  i  $a_1$  dla wzoru wyrażającego zależność  $\rho$  od  $T$

$$\rho = a_0 + a_1 T. \quad (61)$$

Wykonaj odpowiedni wykres (Rys. 6) (Rozwiązanie:  $\hat{a}_0 = -6.3172$ ,  $\hat{a}_1 = 0.0298$ )



Rysunek 6: Dopasowanie zależności  $\rho = a_0 + a_1 T$ .

**Zadanie 7.** [3] Kondensator naładowany jest do pewnego napięcia odpowiadającego chwili rozpoczęcia pomiaru czasu, po czym rozładowuje się wskutek pewnego oporu. Napięcie  $U$  jest mierzone z dokładnością do 5 V w różnych momentach. Wyniki pomiarów przedstawia Tabela 7.

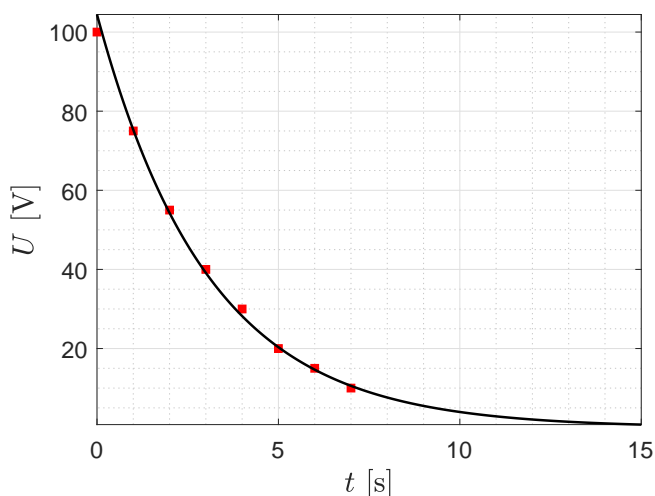
Tabela 7

$k$	$t_k$ [s]	$U_k$ [V]
1	0	100
2	1	75
3	2	55
4	3	40
5	4	30
6	5	20
7	6	15
8	7	10

Wiadomo, że zależność  $U$  od  $t$  ma postać

$$U = U_0 e^{-at} \quad (62)$$

Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć współczynniki  $U_0$  i  $a$ , a następnie wykonać odpowiedni wykres (Rys. 7) (Rozwiązanie:  $\hat{U}_0 = 104.4416$  [V],  $\hat{a} = 0.3272$  [s<sup>-1</sup>])



Rysunek 7: Dopasowanie zależności  $U = U_0 e^{-at}$ .

**Zadanie 8.** [3] W wyniku badań w tunelu areodynamicznym otrzymano dla modelu samolotu dane o zależności kąta odchylenia steru  $\delta$  gwarantującego prostoliniowy lot horyzontalny od prędkości  $v$  strumienia powietrza. Wyniki pomiarów przedstawia Tabela 8, przy czym przez  $w$  oznaczono liczbę pomiarów przy danej prędkości  $v$  (dla których otrzymano ten sam kąt odchylenia).

Tabela 8

$k$	$v_k$ [m/s]	$\delta_k$ [°]	$w_k$
1	80	-3°44'	8
2	90	-2°58'	12
3	100	-2°16'	11
4	110	-1°39'	9
5	120	-1°21'	14
6	140	-0°38'	6
7	160	-0°07'	9
8	180	0°10'	12
9	200	0°35'	10

Wiadomo, że krzywa balansowania określona jest zależnością

$$\delta = a_0 + \frac{a_1}{v^2}. \quad (63)$$

Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć współczynniki  $a_0$  i  $a_1$ , oraz wykonać odpowiedni wykres (Rys. 8).

*Wskazówka 1* Wykonując obliczenia należy uwzględnić, że 1 minuta kąta jest równa 1/60 stopnia.

*Wskazówka 2* Pomiarów wielokrotne można uwzględnić *explicitie* lub wprowadzić macierz wag. Zauważmy, że jeśli  $w_k$  oznacza liczbę powtórzonych pomiarów dla których otrzymano taki sam wynik, to mamy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N r_i^2 &= \sum_{k=1}^p w_k \tilde{r}_k^2 = \sum_{i=1}^N (\sqrt{w_i} r_i)^2 \\ &= \left( \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{w_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 \\ \vdots \\ \tilde{r}_p \end{bmatrix} \right)^T \left( \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{w_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 \\ \vdots \\ \tilde{r}_p \end{bmatrix} \right) \\ &= \|W\tilde{r}\|^2, \end{aligned} \quad (64)$$

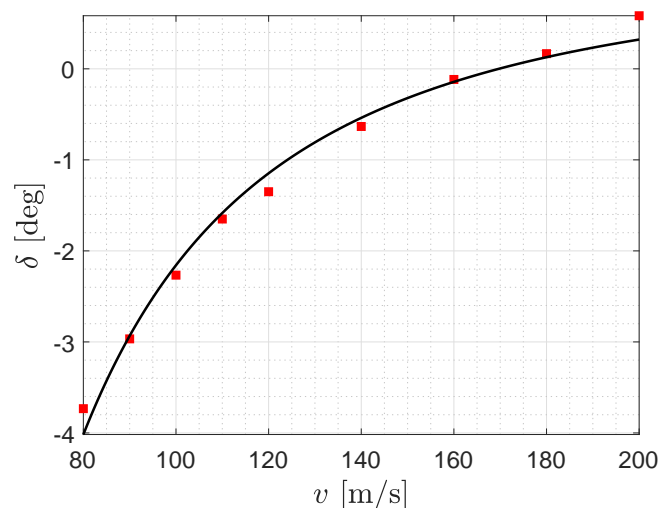
gdzie  $p$  jest liczbą „klastrow”. Jeśli  $\tilde{r} = \tilde{A}x - \tilde{y}$ , to

$$\|W\tilde{r}\|^2 = \|W(\tilde{A}x - \tilde{y})\|^2 = \|W\tilde{A}x - W\tilde{y}\|^2, \quad (65)$$

zatem

$$\hat{x} = (W\tilde{A})^\dagger W\tilde{y}. \quad (66)$$

(Rozwiązanie:  $\hat{a}_0 = 1.1481$ ,  $\hat{a}_1 = -3.3059 \times 10^4$ )



Rysunek 8: Dopasowanie zależności  $\delta = a_0 + \frac{a_1}{v^2}$ .

Tabela 9

Nr	funkcja wyjściowa	postać końcowa	zamiana zmiennych
1	$y = Ae^{ku}$	$z = a_0 + a_1u$	$z = \log y, a_0 = \log A, a_1 = k$
2	$y = Bu^b$	$z = a_0 + a_1v$	$z = \log y, v = \log u, a_0 = \log B, a_1 = b$
3	$y = a_0 + \frac{a_1}{u}$	$y = a_0 + a_1v$	$v = \frac{1}{u}$
4	$y = a_0 + \frac{a_1}{u^b}$	$y = a_0 + a_1v$	$v = \frac{1}{u^b}$
5	$y = A \exp\left(-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}\right)$	$z = a_0 + a_1u + a_2u^2$	$z = \log y, a_0 = \log A - \frac{a^2}{2\sigma^2}, a_1 = \frac{a}{\sigma^2}, a_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$

Sposób korzystania z Tabeli 9 ilustruje poniższy przykład.

**Przykład 1.** Załóżmy, że chcemy wyznaczyć parametry  $A$  i  $k$  dla procesu

$$y = Ae^{ku}. \quad (67)$$

Możemy zlogarytmować<sup>1</sup> obydwie strony (67)

$$\log(y) = \log(Ae^{ku}), \quad (68)$$

skąd otrzymujemy, po uwzględnieniu właściwości funkcji logarytmicznej,

$$\log(y) = \log(A) + ku. \quad (69)$$

Dysponując wartościami  $y_1, \dots, y_N$  dla  $u_1, \dots, u_N$  możemy napisać

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_N \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} \log A \\ k \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} \log y_1 \\ \vdots \\ \log y_N \end{bmatrix}}_Y \quad (70)$$

Mamy

$$\Phi x = Y, \quad (71)$$

zatem

$$\hat{x} = \Phi^\dagger Y. \quad (72)$$

Ponieważ

$$x = \begin{bmatrix} \log A \\ k \end{bmatrix} \quad (73)$$

to odpowiednie estymaty możemy wyznaczyć z zależności

$$\hat{A} = \exp(\hat{x}_1), \quad \hat{k} = \hat{x}_2. \quad (74)$$

## Literatura

- [1] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Introduction to Applied Linear Algebra – Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018. <https://web.stanford.edu/~boyd/vmls/>.
- [2] T. Söderström and P. Stoica. *Identyfikacja Systemów*. PWN, Warszawa, 1997.
- [3] B.G. Wołodin. *Problemy rachunku prawdopodobieństwa*. PWN, Warszawa, 1966.
- [4] I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Nowoczesne kompendium matematyki*. PWN, Warszawa, 2007.

<sup>1</sup>Logarytm naturalny oznaczamy  $\log$ .