

1 Wstęp

Zastanawiając się nad odpowiednikami dyskretnymi modeli ciągłych, musimy odpowiedzieć na pytanie co rozumiemy przez odpowiednik dyskretny transmitancji ciągłej; innymi słowy, jakie warunki musi spełniać dana transmitancja dyskretna $H(z)$ aby można ją było nazwać odpowiednikiem danej transmitancji ciągłej $G(s)$.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z obiektem o transmitancji $G(s)$, dla którego $u(t)$ jest sygnałem wymuszenia zaś $y(t)$ sygnałem odpowiedzi. Jeżeli spróbujemy sygnał wymuszenia $u(t)$ z okresem próbkowania Δ , to otrzymamy ciąg liczb $\{u(kT)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Podobnie, jeżeli spróbujemy sygnał odpowiedzi $y(t)$ z okresem próbkowania Δ , to otrzymamy ciąg liczb $\{y(kT)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Załóżmy teraz, że wymuszeniem układu dyskretnego $H(z)$ jest ciąg liczb $\{u(kT)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Odpowiedzią układu dyskretnego na to wymuszenie jest pewien ciąg liczb $\{y_d(kT)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Układ ten nazwiemy odpowiednikiem układu ciągłego jeżeli $y(kT) = y_d(kT)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Należy podkreślić, że *nie istnieje* idealny odpowiednik dyskretny układu ciągłego. Jeżeli nawet powyższy warunek będzie spełniony dla pewnego wymuszenia $u(t)$ oraz okresu próbkowania Δ , to nie będzie już spełniony dla innych wymuszeń, czy też zmienionego okresu próbkowania, a zatem poszukiwanie odpowiedników dyskretnych transmitancji ciągłych ma sens jedynie wtedy, gdy zawężamy nasze rozważania do konkretnego okresu próbkowania sygnałów ciągłych oraz do pewnej klasy wymuszeń.

Istnieje kilka sposobów poszukiwania odpowiedników dyskretnych transmitancji ciągłych [1, 2, 3, 4]. Jednym z podejść jest numeryczna aproksymacja równań różniczkowych odpowiadających danym transmitancjom ciągłym, przy czym rozróżniamy w tym przypadku metodę opartą na aproksymacji różniczkowania oraz metodę opartą na aproksymacji całkowania. Innym podejściem jest tzw. metoda równoważności odpowiedzi skokowej (ang. *Step Response Equivalence* w skrócie SRE).

1.1 Równoważność odpowiedzi skokowej

W literaturze metodę tę nazywa się metodą SRE (ang. *Step Response Equivalence*), metodą dopasowania odpowiedzi skokowej (ang. *Step Response Matching*), lub też metodą aproksymacji skokowo-niezmienniczej (ang. *Step-Invariant Approximation*).

Metoda ta polega na takim dobraniu odpowiednika dyskretnego $H(z)$ transmitancji ciągłej $G(s)$, aby w chwilach próbkowania $k\Delta$, $k = 0, 1, 2, \dots$ wartości odpowiedzi układu z czasem ciągłym były takie same jak układu z czasem dyskretnym, przy założeniu, że oba układy zostały pobudzone skokiem jednostkowym.

1.1.1 SRE w dziedzinie częstotliwości

Warunek ten można napisać w postaci

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ H(z) \frac{1}{1-z^{-1}} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\} \Big|_{t=kT}. \quad (1)$$

Z równania (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} H(z) &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\} \Big|_{t=k\Delta} \right\} \\ &= \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1-e^{-\Delta s}}{s} G(s) \right\} \Big|_{t=k\Delta} \right\} \\ &= \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \{ G_{\text{ZOH}}(s) G(s) \} \Big|_{t=k\Delta} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Zauważmy, że pomnożeniu przez z^{-1} w dziedzinie operatora z odpowiada opóźnienie o jeden okres próbkowania Δ w dziedzinie czasu. Z kolei opóźnieniu o okres Δ w dziedzinie czasu odpowiada pomnożenie przez $e^{-\Delta s}$ w dziedzinie operatora s . Transmitancja

$$G_{\text{ZOH}}(s) = \frac{1-e^{-\Delta s}}{s} \quad (3)$$

jest transmitancją ekstrapolatora zerowego rzędu, w skrócie ZOH (ang. *Zero-Order Hold*).

Przykład 1. Weźmy pod uwagę następującą transmitancję

$$G(s) = \frac{4s^2 + 17s + 12}{s^2 + 5s + 6}. \quad (4)$$

Transformata Laplace'a odpowiedzi na skok jednostkowy jest równa

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{4s^2 + 17s + 12}{s(s+2)(s+3)} = \frac{2}{s} + \frac{3}{s+2} - \frac{1}{s+3}, \quad (5)$$

skąd po zastosowaniu odwrotnego przekształcenia Laplace'a \mathcal{L}^{-1} otrzymujemy

$$y(t) = 2 \cdot \mathbf{1}(t) + 3e^{-2t} - e^{-3t}. \quad (6)$$

ztem w dyskretnych chwilach tzn. dla $t = k\Delta$, $k = 0, 1, \dots$ mamy

$$y(k\Delta) = 2 \cdot \mathbf{1}(k\Delta) + 3e^{-2k\Delta} - e^{-3k\Delta}. \quad (7)$$

Próbując sygnał $y(t)$ z okresem próbkowania Δ otrzymujemy ciąg liczb $\{y(0), y(\Delta), y(2\Delta), \dots\}$, którego transformata \mathcal{Z} jest równa

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{3z}{z-e^{-2\Delta}} - \frac{z}{z-e^{-3\Delta}} \quad (8)$$

Transformata \mathcal{Z} skoku jednostkowego jest równa $\frac{z}{z-1}$ a zatem transformata odpowiedzi obiektu o transmitancji $\tilde{H}(z)$ na skok jednostkowy wyraża się wzorem

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \tilde{H}(z). \quad (9)$$

A zatem

$$H(z) = \frac{z-1}{z} Y(z) \quad (10)$$

i uwzględniając zależność (8) otrzymujemy

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{2z}{z-1} + \frac{3z}{z-e^{-2T}} - \frac{z}{z-e^{-3T}} \right] \\ &= \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_0 &= 4, \\ b_1 &= -e^{-2T} - 5e^{-3T} - 2, \\ b_2 &= 2e^{-2T}e^{-3T} - e^{-2T} + 3e^{-3T}, \\ a_1 &= -e^{-2T} - e^{-3T}, \\ a_2 &= e^{-2T}e^{-3T}. \end{aligned}$$

Widzimy, że współczynniki transmitancji dyskretnej zależą od okresu próbkowania Δ . Przykładowo, dla $T = 0.2$ mamy

$$H(z) = \frac{4z^2 - 5.4144z + 1.7119}{z^2 - 1.2191z + 0.3679},$$

a dla $T = 0.1$

$$H(z) = \frac{4z^2 - 6.5228z + 2.6168}{z^2 - 1.5595z + 0.6065}.$$

Przykład 2. Dla transmitancji

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT_1}, \quad (12)$$

znaleźć odpowiednik dyskretny (w sensie SRE).

Mamy

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + sT_1} \frac{1}{s} \right\} \Big|_{t=k\Delta} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{T_1}{1 + sT_1} \right\} \Big|_{t=k\Delta} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathbf{1}(k\Delta) - e^{-\frac{kT}{T_1}} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\frac{\Delta}{T_1}}} \right\} \\ &= 1 - \frac{z-1}{z - e^{-\frac{\Delta}{T_1}}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Oznaczając

$$\beta = e^{-\frac{\Delta}{T_1}} \quad (14)$$

możemy napisać

$$H(z) = \frac{1-\beta}{z-\beta} = \frac{(1-\beta)z^{-1}}{1-\beta z^{-1}} = \frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}, \quad (15)$$

gdzie $a_1 = -\beta$, $b_1 = (1-\beta)$.

Przykład 3. Dla transmitancji

$$G(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (16)$$

znaleźć odpowiednik dyskretny (w sensie SRE).

Na mocy twierdzenia o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste można przedstawić rozpatrywaną transmitancję w postaci sumy

$$G(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = \frac{\alpha_1}{1 + sT_1} + \frac{\alpha_2}{1 + sT_2}, \quad (17)$$

gdzie

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 T_2 + \alpha_2 T_1 = 0. \quad (18)$$

Następnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{SRE}(G(S)) &= \alpha_1 \text{SRE} \left(\frac{1}{1 + sT_1} \right) + \alpha_2 \text{SRE} \left(\frac{1}{1 + sT_2} \right) \\ &= \alpha_1 \frac{(1-\beta_1)z^{-1}}{1-\beta_1 z^{-1}} + \alpha_2 \frac{(1-\beta_2)z^{-1}}{1-\beta_2 z^{-1}} \\ &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie

$$\beta_1 = e^{-\frac{\Delta}{T_1}}, \quad \beta_2 = e^{-\frac{\Delta}{T_2}} \quad (20)$$

oraz

$$\begin{aligned} a_1 &= -\beta_1 - \beta_2, \\ a_2 &= \beta_1 \beta_2, \\ b_1 &= \alpha_1(1-\beta_1) + \alpha_2(1-\beta_2), \\ b_2 &= -\alpha_1(1-\beta_1)\beta_2 - \alpha_2(1-\beta_2)\beta_1. \end{aligned}$$

1.1.2 Odpowiedniki skokowe niektórych innych członów dynamicznych

Poniżej podano odpowiedniki skokowe wybranych członów dynamicznych [5]. Symbolem Δ oznaczono okres próbkowania.

1. Dla transmitancji

$$G(s) = \frac{1 + sT_L}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (21)$$

odpowiednikiem dyskretnym jest

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (22)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_1 &= -\beta_1 - \beta_2, & a_2 &= \beta_1 \beta_2, \\ b_1 &= \alpha_1(1-\beta_1) + \alpha_2(1-\beta_2), \\ b_2 &= -\alpha_1(1-\beta_1)\beta_2 - \alpha_2(1-\beta_2)\beta_1, \\ \alpha_1 &= \frac{T_1 - T_L}{T_1 - T_2}, & \alpha_2 &= -\frac{T_2 - T_L}{T_1 - T_2}, \\ \beta_1 &= e^{-\frac{\Delta}{T_1}}, & \beta_2 &= e^{-\frac{\Delta}{T_2}}. \end{aligned}$$

2. Dla transmitancji

$$G(s) = \frac{1 + sT_L}{(1 + 2\xi T_1 s + T_1^2 s^2)} \quad (23)$$

odpowiednikiem dyskretnym jest

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (24)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\beta, & b_1 &= 1 - \beta(\varphi_1 + \varphi_2), \\ a_2 &= \beta^2, & b_2 &= \beta(\beta - \varphi_1 + \varphi_2), & \beta &= e^{-\frac{\Delta}{T_1}}, \\ \varphi_1 &= \cos \left(\frac{\Delta}{T_1} \sqrt{1 - \xi^2} \right), \\ \varphi_2 &= \frac{\xi - \frac{T_L}{T_1}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left(\frac{\Delta}{T_1} \sqrt{1 - \xi^2} \right). \end{aligned}$$

3. Dla transmitancji

$$G(s) = \frac{1 + sT_L}{(1 + sT_1)^2}$$

odpowiednikiem dyskretnym jest

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\beta, & a_2 &= \beta^2, & \beta &= e^{\frac{\Delta}{T_1}}, \\ b_1 &= 1 - \beta \left(1 + \frac{\Delta}{T_1} - \frac{T_L T}{T_1^2} \right), \\ b_2 &= \beta^2 - \beta \left(1 + \frac{\Delta}{T_1} + \frac{T_L T}{T_1^2} \right). \end{aligned}$$

1.1.3 SRE w dziedzinie czasu

Rozważmy ogólny układ LTI z czasem ciągłym

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t), \quad (25a)$$

$$y(t) = C_c x(t), \quad (25b)$$

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem wymuszeń, zaś $y(t) \in \mathbb{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi. Rozwiązanie równania stanu (25), dla $t \geq t_0$, wyraża się wzorem

$$x(t) = e^{A_c(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_c(t-\tau)} B_c u(\tau) d\tau. \quad (26)$$

Układ (25) można zdyskretyzować. Zakładając, że wymuszenie $u(t)$ jest stałe między kolejnymi chwilami próbkowania

$$u(t) = u(k\Delta), \quad \text{dla każdego } t \in [k\Delta, (k+1)\Delta[\quad (27)$$

oraz znając stan w chwili $k\Delta$, można wyznaczyć stan w chwili $(k+1)\Delta$

$$\begin{aligned} x((k+l)\Delta) &= e^{A_c \Delta} x(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{(k+l)\Delta} e^{A_c((k+l)\Delta-\tau)} B_c u(\tau) d\tau \\ &= e^{A_c \Delta} x(k\Delta) + \int_{k\Delta}^{(k+l)\Delta} e^{A_c((k+l)\Delta-\tau)} d\tau B_c u(k\Delta) \\ &= e^{A_c \Delta} x(k\Delta) + \int_0^\Delta e^{A_c \tau} d\tau B_c u(k\Delta). \end{aligned} \quad (28)$$

Oznaczając

$$x(k) = x(k\Delta), \quad u(k) = u(k\Delta), \quad (29)$$

$$A = e^{A_c \Delta}, \quad B = \int_0^\Delta e^{A_c \tau} B_c d\tau, \quad C = C_c, \quad (30)$$

możemy napisać równania odpowiednika dyskretnego

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (31a)$$

$$y(k) = Cx(k). \quad (31b)$$

W dalszym ciągu będziemy pisać x_k oraz u_k zamiast, odpowiednio, $x(k)$ oraz $u(k)$. Zauważmy, że wzór (30) jest słuszny również dla układów tymu MIMO. Ponieważ wymuszenie w postaci skoku jednostkowego jest szczególnym przypadkiem wymuszenie schodkowego, macierze wyznaczone z (30) są macierzami odpowiednika dyskretnego w sensie SRE.

Zauważmy, że wzory (30) można otrzymać z (1). Ponieważ

$$G(s) = C_c(Is - A_c)^{-1} B_c, \quad H(z) = C(Is - A)^{-1} B, \quad (32)$$

to zależność

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ H(z) \frac{1}{1-z^{-1}} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\} \Big|_{t=kT}. \quad (33)$$

jest równoważna warunkowi

$$C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B = C_c \int_0^{k\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (34)$$

w szczególności, dla $k = 1$ otrzymujemy

$$CB = C_c \int_0^\Delta e^{A_c(\Delta-\tau)} B_c d\tau. \quad (35)$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \int_0^\Delta e^{A_c(\Delta-\tau)} B_c d\tau &= \left\{ \begin{array}{l} \xi = \Delta - \tau \\ d\xi = -d\tau \end{array} \right\} = - \int_\Delta^0 e^{A_c \xi} B_c d\xi \\ &= \int_0^\Delta e^{A_c \xi} B_c d\xi = \int_0^\Delta e^{A_c \tau} B_c d\tau \end{aligned}$$

Zatem uwzględniając ten wynik i zależność (35) możemy przyjąć następujący *Ansatz*, mianowicie

$$C = C_c, \quad B = \int_0^\Delta e^{A_c \tau} B_c d\tau. \quad (36)$$

Zauważmy, że jeśli $C = C_c$, warunkiem wystarczającym prawdziwości (34) jest

$$\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B = \int_0^{k\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Zauważmy, że dla $k = 2$ otrzymujemy

$$B + AB = (I + A)B = \int_0^{2\Delta} e^{A_c(2\Delta-\tau)} B_c d\tau. \quad (38)$$

Zauważmy, że

$$\int_0^{2\Delta} e^{A_c(2\Delta-\tau)} B_c d\tau = \quad (39)$$

$$= \int_0^\Delta e^{A_c(2\Delta-\tau)} B_c d\tau + \underbrace{\int_\Delta^{2\Delta} e^{A_c(2\Delta-\tau)} B_c d\tau}_{\left\{ \begin{array}{l} \xi = 2\Delta - \tau \\ d\xi = -d\tau \end{array} \right\}} \quad (40)$$

$$= e^{A_c \Delta} \int_0^\Delta e^{A_c(\Delta-\tau)} B_c d\tau - \int_\Delta^0 e^{A_c \xi} B_c d\xi \quad (41)$$

$$= e^{A_c \Delta} \int_0^\Delta e^{A_c \tau} B_c d\tau + \int_0^\Delta e^{A_c \tau} B_c d\tau \quad (42)$$

$$= (I + e^{A_c \Delta}) \int_0^\Delta e^{A_c \tau} B_c d\tau. \quad (43)$$

Skąd wyciągamy wniosek, że

$$A = e^{A_c \Delta}. \quad (44)$$

Pokażemy, że dla takich macierzy A i B , zachodzi

$$(I + A + \dots + A^{k-1}) = \int_0^{k\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau. \quad (45)$$

Zauważmy na początku, że

$$\int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau = \quad (46)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \xi = k\Delta - \tau \\ d\xi = -d\tau \end{array} \right\} = - \int_\Delta^0 e^{A_c \xi} B_c d\xi$$

$$= \int_0^\Delta e^{A_c \xi} B_c d\xi = \int_0^\Delta e^{A_c \tau} B_c d\tau, \quad (47)$$

czyli

$$\int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau = \int_0^\Delta e^{A_c \tau} B_c d\tau, \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \quad (48)$$

Korzystając z tego wyniku otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int_0^{k\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau &= \int_0^\Delta e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau + \int_\Delta^{2\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau + \dots + \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau \\
&= e^{A_c(k-1)\Delta} \int_0^\Delta e^{A_c(\Delta-\tau)} B_c d\tau + e^{A_c(k-2)\Delta} \int_\Delta^{2\Delta} e^{A_c(2\Delta-\tau)} B_c d\tau + \dots + \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau \\
&= (e^{A_c\Delta})^{k-1} \int_0^\Delta e^{A_c\tau} B_c d\tau + (e^{A_c\Delta})^{k-2} \int_0^\Delta e^{A_c\tau} B_c d\tau + \dots + \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau \\
&= \left[(e^{A_c\Delta})^{k-1} + (e^{A_c\Delta})^{k-2} + \dots + I \right] \int_0^\Delta e^{A_c\tau} B_c d\tau, \tag{49}
\end{aligned}$$

czyli dla

$$A = e^{A_c\Delta}, \quad B = \int_0^\Delta e^{A_c\tau} B_c d\tau, \tag{50}$$

zachodzi

$$\int_0^{k\Delta} e^{A_c(k\Delta-\tau)} B_c d\tau = (I + A + \dots + A^{k-1})B, \tag{51}$$

zatem nasz Ansatz okazał się prawidłowy, dla macierzy danych wzorem (30) zależność (34) i tym samym (1) jest spełniona. Wzór (30) pozwala nam łatwo wyznaczyć numerycznie odpowiednik dyskretny SRE (dla znanej transmitancji układu z czasem ciągłym), bez potrzeby wykonywania skomplikowanych i żmudnych przekształceń koniecznych przy bezpośrednim wykorzystaniu zależności (1).

1.2 Wyznaczanie realizacji dla danej transmitancji

Pozostaje jeszcze wyznaczenie realizacji (A, B, C) modelu z czasem ciągłym na podstawie znajomości jego transmitancji

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}. \tag{52}$$

Istnieje nieskończenie wiele realizacji (A, B, C) takich, że

$$G(s) = C(Is - A)^{-1}B, \tag{53}$$

jedną z nich jest

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{54a}$$

$$C = [b_0 \quad \dots \quad b_{n-1}] \tag{54b}$$

1.3 Identyfikacja odpowiednika dyskretnego

Metodę wyznaczenia (identyfikacji) odpowiednika dyskretnego w sensie SRE dla układu z czasem ciągłym zilustrujemy na przykładzie obiektu drugiego rzędu. Uogólnienie na model wyższego rzędu jest oczywiste. Weźmy pod uwagę układ drugiego rzędu, opisany ściśle właściwą transmitancją $G(s)$. Stosując metodę SRE (*step response equivalence*) możemy znaleźć dyskretny odpowiednik o transmitancji

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \tag{55}$$

Z (55) wynika, że

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2})Y(z) = (b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})U(z) \tag{56}$$

skąd, po zastosowaniu odwrotnej transformaty \mathcal{Z} (tzw. transformaty \mathcal{Z}^{-1}) otrzymujemy

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_0 y_{k-2} = b_1 u_{k-1} + b_0 u_{k-2} \tag{57}$$

tzn.

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_0 y_{k-2} + b_1 u_{k-1} + b_0 u_{k-2} \tag{58}$$

Wykonując pomiary sygnału wejściowego (wymuszenia) u_0, u_1, \dots, u_N oraz sygnału wyjściowego (odpowiedzi) y_0, y_1, \dots, y_N oraz wypisując równanie (58) dla $k = 3, 4, \dots, N$ otrzymujemy następujący układ równań liniowych

$$\begin{cases} y_3 = -a_1 y_2 - a_0 y_1 + b_1 u_2 + b_0 u_1 \\ y_4 = -a_1 y_3 - a_0 y_2 + b_1 u_3 + b_0 u_2 \\ \vdots \\ y_N = -a_1 y_{N-1} - a_0 y_{N-2} + b_1 u_{N-1} + b_0 u_{N-2} \end{cases} \tag{59}$$

który można napisać zwięźle w postaci macierzowej

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} -y_2 & -y_1 & u_2 & u_1 \\ -y_3 & -y_2 & u_3 & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{N-1} & -y_{N-2} & u_{N-1} & u_{N-2} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}_x \tag{60}$$

tzn.

$$Ax = y \tag{61}$$

Estymator LS (ang. *least squares*) \hat{x} wektora parametrów x jest dany wzorem

$$\hat{x} = \arg \min_x \|Ax - y\| = A^\dagger y \tag{62}$$

Należy pamiętać, że udana estymacja wymaga sygnału wejściowego o możliwie szerokim spektrum. Zauważmy, że w przedstawiona wyżej metoda nie wymaga znajomości transmitancji obiektu z czasem ciągłym, a jedynie wartości spróbowanych sygnałów wymuszenia i odpowiedzi (tzn. sygnałów wejścia i wyjścia). Jeżeli transmitancja obiektu z czasem ciągłym jest znana, to odpowiednik dyskretny (w sensie SRE) można wyznaczyć bezpośrednio, bez znajomości wartości sygnałów wymuszenia i odpowiedzi.

2 Zadania

Zadanie 1. Dla transmitancji

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} \tag{63}$$

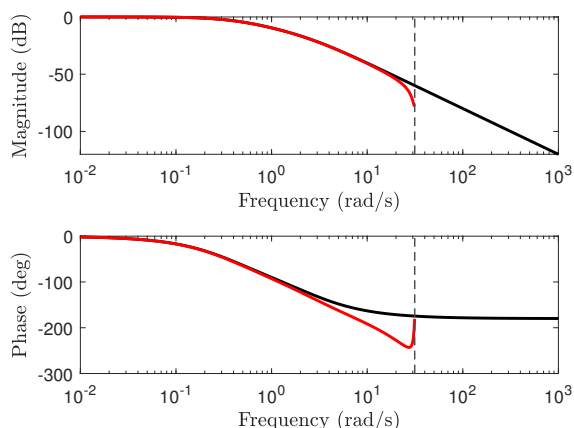
Wyznacz model w przestrzeni stanu, a następnie, korzystając ze wzorów (30), wyznacz odpowiednik dyskretny w postaci modelu w przestrzeni stanu i transmitancji. Przyjmij, że okres

próbkowania wynosi $\Delta = 0.1$ [s]. Transmitancję odpowiednika dyskretnego $H(z)$

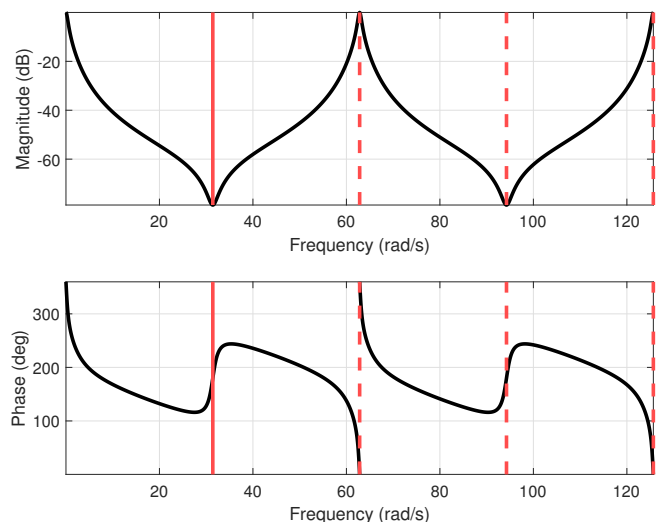
$$H(z) = C(Iz - A)^{-1}B \quad (64)$$

możesz wyznaczyć korzystając z polecenia `ss2tf`.

Zadanie 2. Dla transmitancji ciągłej i dyskretnej z Zadania 1 wygeneruj wykresy charakterystyk częstotliwościowych. Charakterystyka amplitudowa – dla układów z czasem ciągłym $G(s)$ na osi OY mamy $20 \log_{10}(|G(i\omega)|)$, na osi OX zaś ω lub $\log_{10}(\omega)$, dla układów z czasem dyskretnym $H(z)$ na osi OY mamy $20 \log_{10}(|H(e^{i\omega T_s})|)$, na osi OX zaś ω lub $\log_{10}(\omega)$. Charakterystyka fazowa – dla układów z czasem ciągłym $G(s)$ na osi OY mamy $\arg(|G(i\omega)|)$, na osi OX zaś ω lub $\log_{10}(\omega)$, dla układów z czasem dyskretnym $H(z)$ na osi OY mamy $\arg(H(e^{i\omega T_s}))$, na osi OX zaś ω lub $\log_{10}(\omega)$. Na podstawie wykresów z liniową skalą na osi OX przekonaj się, że charakterystyki układu z czasem dyskretnym są funkcjami okresowymi, z okresem równym $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/\Delta$ (Rys. 2).



Rysunek 1: Porównanie charakterystyk Bodego układu z czasem ciągłym i jego odpowiednika dyskretnego. Częstotliwość próbkowania $f_s = 1/\Delta = 10$ [Hz].



Rysunek 2: Powielanie wykresu transmitancji widmowej układu z czasem dyskretnym.

Zauważ, że dla układów z czasem dyskretnym opisanych transmitancją

$$H(z) = \frac{b_{n-1}z^{-1} + b_{n-2}z^{-2} + \dots + b_0z^{-n-1}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + a_{n-2}z^{-2} + \dots + a_0z^{-n}} \quad (65)$$

mamy

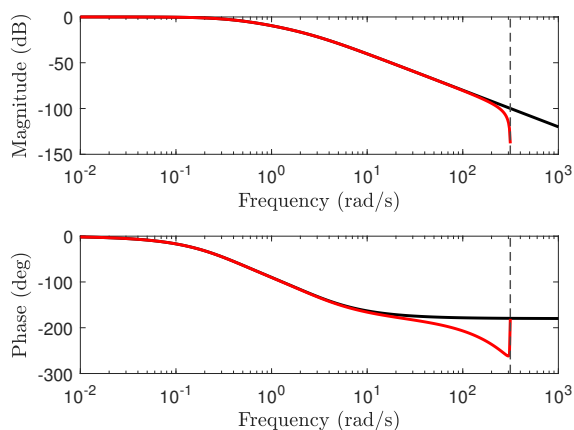
$$|H(e^{i\omega\Delta})| = |H(e^{-i\omega\Delta})|$$

oraz

$$\arg(H(e^{i\omega\Delta})) = -\arg(H(e^{-i\omega\Delta})),$$

dlatego charakterystyki częstotliwościowe układów z czasem dyskretnym najczęściej wyznacza się dla przedziału $[0, \omega_s/2]$. Częstotliwość kołową (pulsację) $\omega_s/2$ (czyli połowę częstotliwości próbkowania) nazywamy *częstotnością Nyquista*.

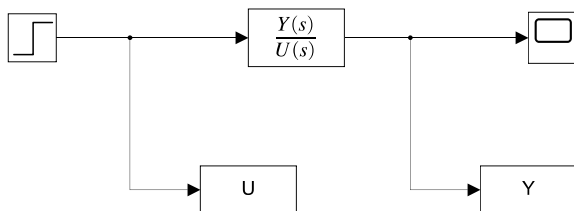
Zadanie 3. Porównaj charakterystyki Bodego dla układu z czasem ciągłym oraz jego odpowiednika dyskretnego dla okresu próbkowania $\Delta = 0.1$ [s] (Rys. 1) oraz $\Delta = 0.01$ [s] (Rys. 1).



Rysunek 3: Porównanie charakterystyk Bodego układu z czasem ciągłym i jego odpowiednika dyskretnego. Częstotliwość próbkowania $f_s = 1/\Delta = 100$ [Hz].

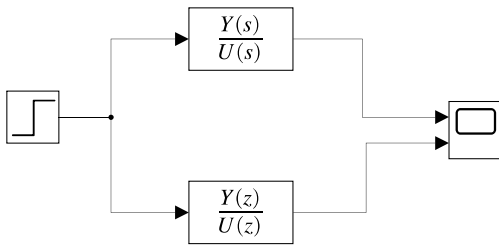
Zadanie 4. Dla transmitancji i okresu próbkowania z Zadania 1

1. Zbuduj model w środowisku Simulink, tak jak to przedstawia Rys. 4 oraz zarejestruj i wykreśl sygnał wejściowy U i sygnał wyjściowy Y . Jako sygnału wejściowego użyj skoku jednostkowego.
2. Napisz odpowiedni skrypt w środowisku Matlab, który na podstawie zarejestrowanych wektorów U oraz Y wyznaczy wartości parametrów modelu dyskretnego.

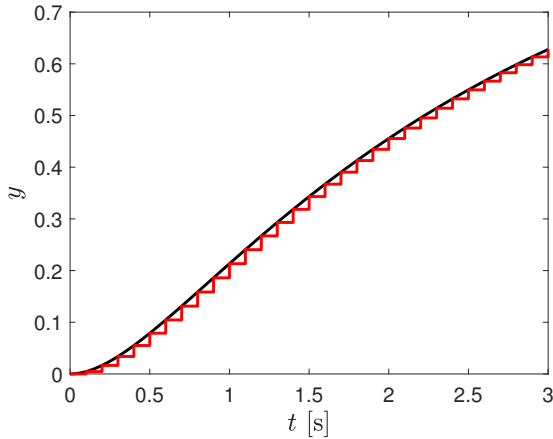


Rysunek 4: Schemat symulacji eksperymentalnego.

3. Zbuduj model w środowisku Simulink, tak jak to przedstawia Rys. 5, złożony z układu z czasem ciągłym oraz z jego zidentyfikowanego odpowiednika dyskretnego. Wykonaj symulację w celu potwierdzenia zgodności obydwu modeli dla sygnału wejściowego w postaci skoku jednostkowego. Prawidłowe wyniki przedstawia Rys. 6.



Rysunek 5: Porównanie odpowiedzi skokowych modeli z czasem ciągłym i dyskretnym.



Rysunek 6: Odpowiedzi skokowe modeli z czasem ciągłym i dyskretnym.

Dodatek – analiza częstotliwościowa

Modele z czasem ciągłym

Rozpatrujemy model z czasem ciągłym $Y(s) = G(s)U(s)$. Jeśli sygnał wejściowy jest sinusoidą

$$u(t) = a \sin(\omega t),$$

system zaś jest asymptotycznie stabilny, to ustalony sygnał wyjściowy będzie miał postać

$$y(t) = b \sin(\omega t + \phi),$$

gdzie

$$b = a |G(i\omega)|, \quad \phi = \arg G(i\omega). \quad (66)$$

Można to udowodnić w następujący sposób [6]. Dla uproszczenia założymy, że w chwili początkowej system znajduje się w spoczynku. (Ze względu na założenie stabilności, niezerowe wartości początkowe miałyby wpływ na sygnał wyjściowy tylko w fazie nieustalonej). Można teraz opisać system wzorem

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) u(t - \tau) d\tau,$$

gdzie $h(\tau)$ jest funkcją o transformacji Laplace'a $G(s)$, tzn. $G(s) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$. Oznaczmy

$$G_t(s) = \int_0^t h(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Ponieważ

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a}{2i} \int_0^t h(\tau) [e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}] d\tau \\ &= \frac{a}{2i} [e^{i\omega t} G_t(i\omega) - e^{-i\omega t} G_t(-i\omega)] \\ &= \frac{a}{2i} |G_t(i\omega)| [e^{i\omega t} e^{i \arg G_t(i\omega)} - e^{-i\omega t} e^{-i \arg G_t(i\omega)}] \\ &= a |G_t(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_t(i\omega)). \end{aligned}$$

Ponieważ $G_t(i\omega)$ dąży do $G(i\omega)$, gdy t dąży do nieskończoności, zatem wzory (66) są udowodnione.

Modele z czasem dyskretnym

Rozpatrujemy model z czasem dyskretnym $Y(z) = H(z)U(z)$. Jeśli sygnał wejściowy jest spróbkowaną sinusoidą

$$u_k = a \sin(\omega k \Delta),$$

gdzie Δ jest okresem próbkowania, zaś system jest asymptotycznie stabilny, to ustalony sygnał wyjściowy będzie miał postać

$$y_k = b \sin(\omega k \Delta + \phi),$$

gdzie

$$b = a |H(e^{i\omega\Delta})|, \quad \phi = \arg H(e^{i\omega\Delta}). \quad (67)$$

Można to udowodnić w następujący sposób [6]. Dla uproszczenia założymy, że w chwili początkowej system znajduje się w spoczynku. (Ze względu na założenie stabilności, niezerowe wartości początkowe miałyby wpływ na sygnał wyjściowy tylko w fazie nieustalonej). Można teraz opisać system wzorem

$$y_n = \sum_{k=0}^n h_k u_{n-k},$$

gdzie h_k jest funkcją o transformacji Z równej $H(z)$, tzn. $H(z) = \sum_{k=0}^\infty h_k z^{-k}$. Oznaczmy

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^n h_k z^{-k}.$$

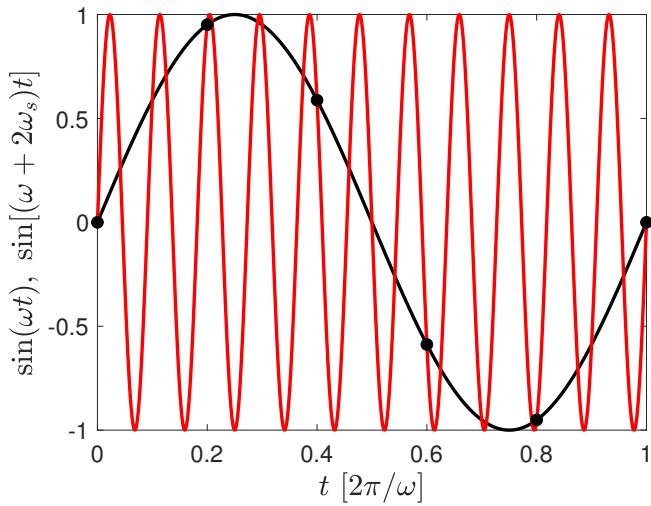
Ponieważ

$$\sin(\omega k \Delta) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega k \Delta} - e^{-i\omega k \Delta}),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{a}{2i} \sum_0^n h_k [e^{i\omega(n-k)\Delta} - e^{-i\omega(n-k)\Delta}] \\ &= \frac{a}{2i} [e^{i\omega n \Delta} H_n(e^{i\omega\Delta}) - e^{-i\omega n \Delta} H_n(e^{-i\omega\Delta})] \\ &= \frac{a}{2i} |H_n(i\omega\Delta)| [e^{i\omega n \Delta} e^{i \arg H_n(e^{i\omega\Delta})} - e^{-i\omega n \Delta} e^{-i \arg H_n(e^{i\omega\Delta})}] \\ &= a |H_n(e^{i\omega\Delta})| \sin(\omega n \Delta + \arg H_n(e^{i\omega\Delta})). \end{aligned}$$

Ponieważ $H_n(e^{i\omega\Delta})$ dąży do $H(e^{i\omega\Delta})$, gdy n dąży do nieskończoności, zatem wzory (67) są udowodnione.



Rysunek 7: Próbkowanie sygnałów sinusoidalnych o różnych pulsacjach. Na czarno zaznaczono sygnał o pewnej pulsacji ω . Kolorem niebieskim i czerwonym zaznaczono sygnały o pulsacjach, odpowiednio, $\omega + \omega_s$ oraz $\omega + 2\omega_s$, gdzie ω_s oznacza częstość próbkowania.

Powielanie widma

Ze wzoru Eulera

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi,$$

mamy $e^{i2\pi m} = 1$ dla całkowitych wartości m . Wynika stąd, że

$$e^{i\omega\Delta} = e^{i\omega\Delta} e^{i2\pi m} = e^{i(\omega + \frac{2\pi m}{\Delta})\Delta}.$$

Wynika stąd, że transmitancja dyskretna $H(e^{i\omega\Delta})$ jako funkcja parametru ω jest funkcją okresową, z okresem równym $\frac{2\pi}{\Delta}$. Zauważmy, że $\frac{2\pi}{\Delta} = 2\pi f_s = \omega_s$, gdzie $f_s = \frac{1}{\Delta}$ jest częstotliwością próbkowania, zaś ω_s jest pulsacją (częstotliwością kołową) próbkowania. Wynika stąd, że charakterystyki częstotliwościowe układu dyskretnego wystarczy rozpatrywać na przedziale o długości ω_s . Zauważmy również, że dla

$$H(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0}$$

mamy

$$H(e^{-i\omega\Delta}) = H^*(e^{i\omega\Delta}).$$

Wynika stąd, że analizę charakterystyk częstotliwościowych układu dyskretnego można ograniczyć do przedziału $[0, \omega_s/2]$. Wartość $\omega_s/2$ nazywamy częstością Nyquista, jest ona równa połowie częstości próbkowania. Należy podkreślić, że przedyskutowane na Rys. 2 powielanie wykresu transmitancji widmowej układu z czasem dyskretnym (w skrócie nazywane powielaniem widma układu) nie jest jedynie artefaktem matematycznym (ani tym bardziej artystycznym, jak na Rys. 8), ale ważnym zjawiskiem fizycznym, które trzeba brać pod uwagę przy projektowaniu układów sterowania. Powielanie widma wynika z faktu, że próbkowanie sygnału sinusoidalnego y o częstości ω z częstością próbkowania ω_s generuje taki sam ciąg wartości y_k jak próbkowanie (z tą samą częstością próbkowania) sygnału sinusoidalnego o tej samej amplitudzie ale częstości równej $\omega + m\omega_s$, co matematycznie można wyrazić wzorem

$$\sin(\omega k\Delta) = \sin\left[\left(\omega + m\frac{2\pi}{\Delta}\right)k\Delta\right], \quad \omega_s = \frac{2\pi}{\Delta}.$$

Ilustruje to Rys. 7, na którym przedstawiono próbkowanie sygnałów sinusoidalnych o różnych pulsacjach. Na czarno zaznaczono sygnał o pewnej pulsacji ω . Kolorem czerwonym zaznaczono sygnał o pulsacji $\omega + 2\omega_s$, gdzie ω_s oznacza częstość próbkowania.



Rysunek 8: Triple portrait du Cardinal de Richelieu par Philippe de Champaigne, Londres, National Gallery. Armand Jean du Plessis de Richelieu, dit le cardinal de Richelieu, cardinal-duc de Richelieu et duc de Fronsac, est un ecclésiastique et homme d'État français, né le 9 septembre 1585 a Paris et mort le 4 décembre 1642 dans cette meme ville. Pair de France, il a été le principal ministre du roi Louis XIII. Réputé pour son habileté voire pour son caractere jugé retors, souvent critiqué pour sa fermeté intransigeante, il rénove la vision de la raison d'État et en fait la clef de voute de ses méthodes de gouvernement et de sa conception de la diplomatie et de la politique. Richelieu est considéré comme l'un des fondateurs majeurs de l'État moderne en France. Son action est un dur combat pour un renforcement du pouvoir royal. Richelieu est aussi célèbre pour le soutien qu'il apporte aux arts ; le fait le plus connu est la fondation en 1635 de l'Académie française, société responsable des questions concernant la langue française. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Armand_Jean_du_Plessis_de_Richelieu]

Literatura

- [1] G. F. Franklin, D. J. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 1994.
- [2] W. S. Levine, editor. *The Control Handbook*. CRC Press, Inc., 1996.
- [3] S. Osowski. *Modelowanie i symulacja układów i procesów dynamicznych*. OWPW, 2007.
- [4] P. N. Paraskevopoulos. *Modern Control Engineering*. Marcel Dekker, Inc., New York - Basel, 2002.
- [5] B. Beliczyński and W. Koziański. *Wprowadzenie do regulacji cyfrowej*. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1989.
- [6] T. Söderström and P. Stoica. *Identyfikacja Systemów*. PWN, Warszawa, 1997.
- [7] Jean-Vincent Blanchard. *Éminence: Cardinal Richelieu and the Rise of France*. Walker Books, 2011.