

1 Metoda RLS

Rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów (ang. *recursive least squares, RLS*) należy do podstawowych technik identyfikacji. Stanowi również dogodny punkt wyjścia do wyprowadzenia równań dyskretnego filtru Kalmana. Rozpatrzmy „skalarny” wariant tej metody, czyli dotyczący sytuacji, w której mamy do czynienia z pomiarami skalarnymi (w tym sensie, że wynikiem pojedynczego pomiaru jest wielkość skalarna), oraz założeniem, że wszystkie pomiary są jednakowo wiarygodne. Rozpatrujemy układ równań

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} + \epsilon_1 \\ y_2 &= \mathbf{a}_2^T \mathbf{x} + \epsilon_2 \\ &\vdots \\ y_k &= \mathbf{a}_k^T \mathbf{x} + \epsilon_k \\ y_{k+1} &= \mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{x} + \epsilon_{k+1} \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $y_1, y_2, \dots, y_{k+1} \in \mathbb{R}$ oznaczają wyniki pomiarów, wektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$, odpowiadające konfiguracji układu pomiarowego, są znane, zaś residua $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{k+1} \in \mathbb{R}$ są wynikiem szumu pomiarowego. Wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem zmiennych estymowanych, których wartości chcemy wyznaczyć na podstawie wartości pomiarów.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\mathbf{A}_{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad \mathbf{A}_{(k+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{k+1}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times n}, \quad (2)$$

$$\mathbf{y}_{(k)} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k, \quad \mathbf{y}_{(k+1)} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(k)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{(k+1)} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_{k+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}. \quad (4)$$

Korzystając z (1–4) możemy napisać

$$\mathbf{A}_{(k+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(k)} \\ \mathbf{a}_{k+1}^T \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{y}_{(k+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(k)} \\ y_{k+1} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(k+1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{(k)} \\ \epsilon_{k+1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

oraz

$$\mathbf{y}_{(k)} = \mathbf{A}_{(k)} \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}_{(k)}, \quad (8a)$$

$$\mathbf{y}_{(k+1)} = \mathbf{A}_{(k+1)} \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}_{(k+1)}, \quad (8b)$$

przy czym zależności (8) można napisać w równoważnej postaci

$$\mathbf{A}_{(k)} \mathbf{x} - \mathbf{y}_{(k)} = -\boldsymbol{\epsilon}_{(k)}, \quad (9a)$$

$$\mathbf{A}_{(k+1)} \mathbf{x} - \mathbf{y}_{(k+1)} = -\boldsymbol{\epsilon}_{(k+1)}. \quad (9b)$$

Z właściwości pseudoinwersji Moore’a–Penrose’a wynika, że wektor

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_{(k)}^\dagger \mathbf{y}_{(k)} \quad (10)$$

minimalizuje funkcję

$$J_k(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}_{(k)} \mathbf{x} - \mathbf{y}_{(k)}\|_2^2, \quad (11)$$

zaś

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_{(k+1)}^\dagger \mathbf{y}_{(k+1)} \quad (12)$$

minimalizuje funkcję

$$J_{k+1}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}_{(k+1)} \mathbf{x} - \mathbf{y}_{(k+1)}\|_2^2, \quad (13)$$

zatem wektory $\hat{\mathbf{x}}_k$ oraz $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ odpowiadają sytuacji, kiedy kwadrat normy wektora residuów $\|\boldsymbol{\epsilon}_{(k)}\|_2^2$, oraz, odpowiednio, wektora $\|\boldsymbol{\epsilon}_{(k+1)}\|_2^2$, osiąga wartość minimalną. W języku rachunku prawdopodobieństwa odpowiada to minimalizacji wariancji szumu, przy założeniu, że szum ten ma zerową wartość oczekiwaną, czy mówiąc mniej precyzyjnie, zerową wartość średnią. Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}_{(k)}$ jest pełnego rzędu kolumnowego (lub równoważnie, że $\mathcal{N}(\mathbf{A}_{(k)}) = \{\mathbf{0}\}$) i wprowadźmy oznaczenia

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{A}_{(k)}^T \mathbf{A}_{(k)})^{-1}, \quad (14a)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{A}_{(k+1)}^T \mathbf{A}_{(k+1)})^{-1}. \quad (14b)$$

Mamy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{A}_{(k)}^\dagger \mathbf{y}_{(k)} \\ &= (\mathbf{A}_{(k)}^T \mathbf{A}_{(k)})^{-1} \mathbf{A}_{(k)}^T \mathbf{y}_{(k)} \\ &= \mathbf{P}_k \mathbf{A}_{(k)}^T \mathbf{y}_{(k)} \end{aligned} \quad (15)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= (\mathbf{A}_{(k+1)}^T \mathbf{A}_{(k+1)})^{-1} \\ &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(k)}^T & \mathbf{a}_{k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(k)} \\ \mathbf{a}_{k+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= (\mathbf{A}_{(k)}^T \mathbf{A}_{(k)} + \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}^T)^{-1} \\ &= (\mathbf{P}_k^{-1} + \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_k - \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} (1 + \mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1})^{-1} \mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{P}_k \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie w ostatnim przejściu skorzystano z lematu o odwracaniu macierzy. Oznaczając

$$\gamma_k = (1 + \mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1})^{-1}, \quad (17)$$

i uwzględniając, że γ_k jest wielkością skalarną, ze wzoru (16) otrzymujemy

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{P}_k. \quad (18)$$

Ponieważ zgodnie z (14) macierz \mathbf{P}_k jest symetryczna, możemy (18) napisać w postaci

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} (\mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1})^T. \quad (19)$$

Korzystając z (15) i (16) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}_{(k+1)}^\dagger \mathbf{y}_{(k+1)} \\ &= \left(\mathbf{A}_{(k+1)}^T \mathbf{A}_{(k+1)} \right)^{-1} \mathbf{A}_{(k+1)}^T \mathbf{y}_{(k+1)} \\ &= (\mathbf{P}_k - \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{P}_k) \left(\mathbf{A}_{(k)}^T \mathbf{y}_{(k)} + \mathbf{a}_{k+1} y_{k+1} \right) \\ &= (\mathbf{I} - \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}^T) \mathbf{P}_k \left(\mathbf{A}_{(k)}^T \mathbf{y}_{(k)} + \mathbf{a}_{k+1} y_{k+1} \right) \\ &= (\mathbf{I} - \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}^T) \left(\underbrace{\mathbf{P}_k \mathbf{A}_{(k)}^T \mathbf{y}_{(k)}}_{\hat{\mathbf{x}}_k} + \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} y_{k+1} \right) \\ &= (\hat{\mathbf{x}}_k - \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}^T \hat{\mathbf{x}}_k) + \\ &\quad (\mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} - \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1}) y_{k+1} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k - \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}^T \hat{\mathbf{x}}_k + \\ &\quad \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} \left(\underbrace{1 + \mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1}}_{\gamma_k^{-1}} \right) y_{k+1} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k - \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{a}_{k+1}^T \hat{\mathbf{x}}_k + \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} y_{k+1} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k + \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} (y_{k+1} - \mathbf{a}_{k+1}^T \hat{\mathbf{x}}_k) \end{aligned} \quad (20)$$

Podsumowując, otrzymujemy zależności rekurencyjne

$$\gamma_k = (1 + \mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1})^{-1}, \quad (21a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \gamma_k \mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1} (y_{k+1} - \mathbf{a}_{k+1}^T \hat{\mathbf{x}}_k), \quad (21b)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \gamma_k (\mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1}) (\mathbf{P}_k \mathbf{a}_{k+1})^T \quad (21c)$$

dla $k = 0, 1, \dots$

Zależności (21) możemy również zapisać w równoważnej postaci

$$K_k = (1 + \mathbf{a}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{a}_k)^{-1}, \quad (22a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + K_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{a}_k (y_k - \mathbf{a}_k^T \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (22b)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - K_k (\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{a}_k) (\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{a}_k)^T \quad (22c)$$

dla $k = 1, \dots$ Zauważmy, że napisanie $k = 1, \dots$ w (21) lub (22) jest pewnym nadużyciem, ponieważ warunkiem koniecznym istnienia odwrotności w (14a) jest $k \geq n$, gdzie n jest liczbą estymowanych parametrów. W teorii powinniśmy wykonać co najmniej $k = n$ pomiarów, wyznaczyć \mathbf{P}_k i $\hat{\mathbf{x}}_k$ ze wzorów, odpowiednio, (14a) i (15) a następnie iterować zgodnie ze wzorami (21) lub (22). W praktyce, możemy zacząć od $k = 0$ a macierze \mathbf{P}_0 i $\hat{\mathbf{x}}_0$ wziąć „z sufitu”, np. $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$ i $\hat{\mathbf{x}}_0 = 0$, co ilustruje poniższy przykład.

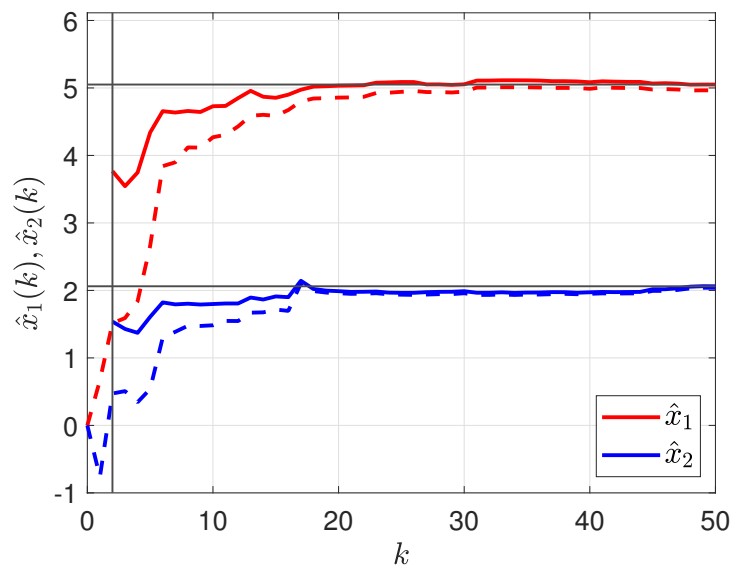
Przykład 1. Dana jest pewna macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ i wektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, ($n = 2$, $N = 50$), wyznaczono najpierw estymatę $\hat{\mathbf{x}}_{\text{nrls}} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}$, otrzymując wynik

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{nrls}} = \begin{bmatrix} 5.0505 \\ 2.0614 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

który zaznaczono na Rys. 1 poziomymi czarnymi prostymi. Następnie, dla porównania, zastosowano metodę rekurencyjną, „w dwóch wersjach”. Najpierw dla $k = 2$ policzono \mathbf{P}_2 i $\hat{\mathbf{x}}_2$ ze wzorów, odpowiednio, (14a) i (15), a następnie iterowano zgodnie z (22). Jak widać, dla $k = N$ otrzymano zgodność wyników, tzn.

$$\hat{\mathbf{x}}_N = \hat{\mathbf{x}}_{\text{nrls}} = \begin{bmatrix} 5.0505 \\ 2.0614 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Następnie arbitralnie przyjęto $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$ i $\hat{\mathbf{x}}_0 = 0$, a następnie iterowano zgodnie z (22). Wszystkie wyniki, te otrzymane w pierwszym jak i drugim podejściu, przedstawiono na Rys. 1. Otrzymane przebiegi sugerują, że końcowe wartości estymat w obu przypadkach są podobne, oraz, że im większe N , tym mniejsza końcowa różnica. Okazuje się, że wartości macierzy \mathbf{P}_0 ma wpływ na szybkość zbieżności tych wyników, co ilustruje kolejny przykład.



Rysunek 1: Estymaty \hat{x}_1 i \hat{x}_2 z Przykładu 1.

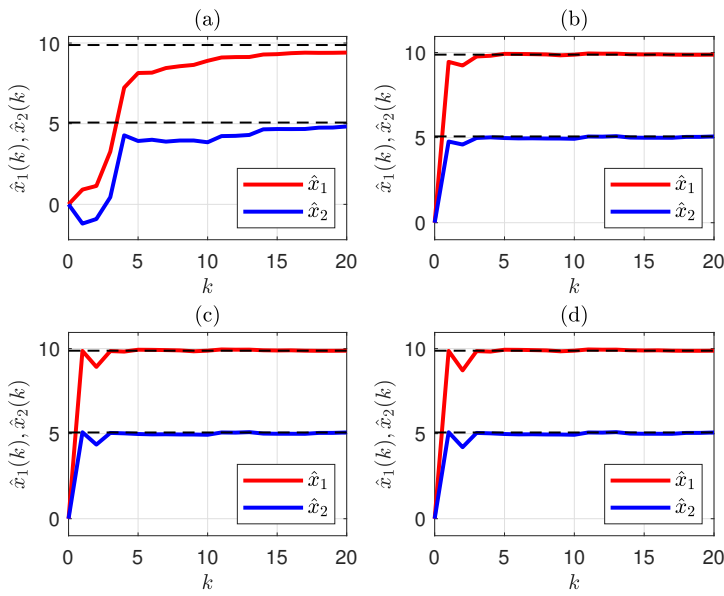
Przykład 2. Dla pewnej macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ i wektora $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, ($n = 2$, $N = 20$), wyznaczono najpierw estymatę $\hat{\mathbf{x}}_{\text{nrls}} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}$, otrzymując wynik

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{nrls}} = \begin{bmatrix} 9.8757 \\ 5.0696 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Następnie przyjmując warunki początkowe

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{rls}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

oraz $P_0 = \mathbf{I}$ [przypadek (a)], $P_0 = \mathbf{I} \cdot 10$ [przypadek (b)], $P_0 = \mathbf{I} \cdot 10^2$ [przypadek (c)], $P_0 = \mathbf{I} \cdot 10^3$ [przypadek (d)], zastosowano wzory (21), wyznaczając $\hat{\mathbf{x}}_{\text{rls}}(k)$ dla $k = 1, \dots, N$. Wyniki przedstawiono na Rys. 2. Można zaobserwować wpływ macierzy P_0 na zbieżność metody, im "większa" macierz P_0 tym lepsza zbieżność, jednak o ile użycie $P_0 = \mathbf{I} \cdot 10$ zamiast $P_0 = \mathbf{I}$ daje wyraźną poprawę, to dalsza poprawa wynikająca z zastosowania $P_0 = \mathbf{I} \cdot 10^3$ zamiast $P_0 = \mathbf{I} \cdot 10$ jest już bardzo mała.



Rysunek 2: Estymaty \hat{x}_1 i \hat{x}_2 z Przykładu 2. Warunki początkowe dla wektora estymaty $\hat{x}_1(0) = 0$, $\hat{x}_2(0) = 0$. Kolorem czarnym zaznaczono wartości estymat otrzymane metodą nie-rekurencyjną $\hat{x}_1(0) = 9.8757$, $\hat{x}_2(0) = 5.0696$. Warunki początkowe dla macierzy kowariancji: $P_0 = I$ [panel (a)], $P_0 = I \cdot 10$ [panel (b)], $P_0 = I \cdot 10^2$ [panel (c)], $P_0 = I \cdot 10^3$ [panel (d)]

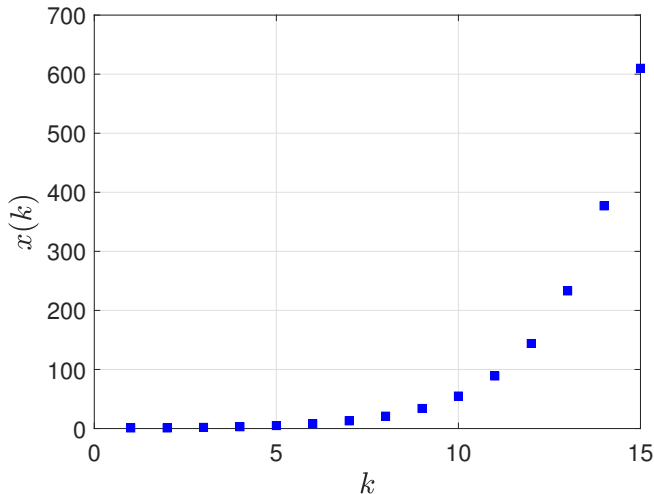
2 Modelowanie związków rekurencyjnych

Poniższe przykłady demonstrują w jaki sposób można modelować zależności rekurencyjne za pomocą pętli `for`. Więcej informacji na temat składni pętli `for` w środowisku Matlab można otrzymać po wpisaniu `help for` w oknie poleceń środowiska Matlab.

Przykład 3. Chcemy obliczyć pierwsze $N = 15$ liczb Fibonacciego, które są zdefiniowane następująco $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, oraz dla $k \geq 3$

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2} \quad (27)$$

Możemy rozwiązać to zadanie korzystając z kodu przedstawionego w Listingu 1.



Rysunek 3: Liczby Fibonacciego [Przykład 3]

Listing 1.

```
close all
clear
clc

nfontslatex = 18;
nfontsize = 14;

N = 15;

x_k_minus_1 = 1;
x_k_minus_2 = 1;

X = zeros(1,N);
X(1,1) = x_k_minus_2;
X(1,2) = x_k_minus_1;

for k = 3:N
    x_k = x_k_minus_1 + x_k_minus_2;
    x_k_minus_2 = x_k_minus_1;
    x_k_minus_1 = x_k;
    X(1,k) = x_k;
end

figure
plot((1:N),X,'s','MarkerEdgeColor','b', ...
     'MarkerFaceColor','b')
grid on
set(gca,'FontSize',nfontsize);
xlabel('$k$', 'Interpreter','Latex', ...
     'FontSize',nfontslatex)
ylabel('$x(k)$', 'Interpreter','Latex', ...
     'FontSize',nfontslatex)
```

Przykład 4. Weźmy pod uwagę model dyskretny układu dynamicznego

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (28a)$$

$$y_k = Cx_k \quad (28b)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0.4716 & 0.0662 \\ -1.2128 & 0.6524 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.3271 \\ 1.0826 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.0061 & -0.6509 \\ -1.2128 & 0.6524 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Załóżmy, że chcemy obliczyć pierwszą sekwencję odpowiedzi tego układu tzn., y_0, y_1, \dots, y_N dla następujących zadanych wartości sygnału wymuszenia u_0, u_1, \dots, u_{N-1} , przy znanym warunku początkowym

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Przyjmujemy $N = 120$, zaś wartości wymuszenia są określone wzorem

$$u(k) = \text{sgn} \left(\sin \left(\frac{5\pi k}{100} \right) \right), \quad (32)$$

gdzie

$$k = 0, 1, \dots, N-1,$$

zaś `sgn` oznacza tzw. funkcję signum. Możemy to zrobić korzystając z kodu przedstawionego w Listingu 2.

Listing 2.

```
close all
clear
clc

nfontslatex = 18;
nfonts = 14;

N = 120;
U = sign(sin(5*pi*(0:N-1)/100));

A = [0.4716 0.0662; -1.2128 0.6524];
B = [0.3271; 1.0826];
C = [1.0061 -0.6509; -1.2128 0.6524];

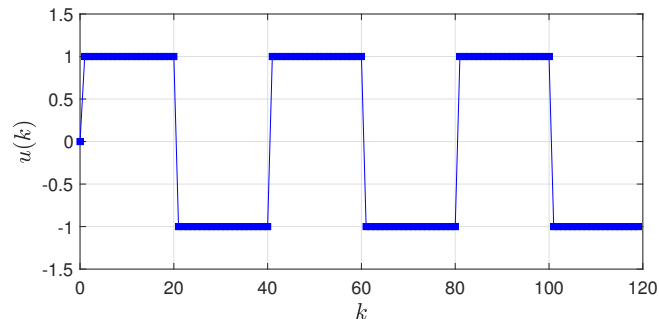
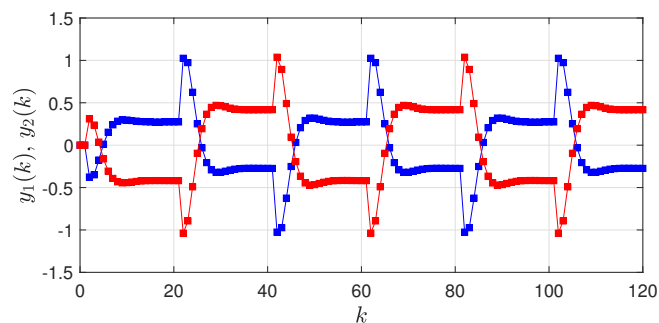
n = 2; % number of state variables
m = 1; % number of inputs
p = 2; % number of outputs
N = size(U,2);
X = zeros(n,N);
x0 = zeros(n,1);
x = x0;
for k = 1:N
    x = A*x + B*U(:,k);
    X(:,k) = x;
end

X = [x0 X];
Y = C*X;

figure('units','normalized', ...
    'outerposition',[0 0 0.5 1])
subplot(2,1,1)
plot(0:N,Y(1,:), 's-b', 'MarkerEdgeColor', ...
    'b', 'MarkerFaceColor', 'b')

hold on
plot(0:N,Y(2,:), 's-r', 'MarkerEdgeColor', ...
    'r', 'MarkerFaceColor', 'r')
axis([0 N -1.5 1.5])
grid on
set(gca, 'FontSize', nfonts);
xlabel('$k$', 'Interpreter', 'Latex', ...
    'FontSize', nfontslatex)
ylabel('$y_{1}(k)$, $y_{2}(k)$', ...
    'Interpreter', 'Latex', ...
    'FontSize', nfontslatex)

subplot(2,1,2)
plot(0:N-1,U(1,:), 's-b', 'MarkerEdgeColor', ...
    'b', 'MarkerFaceColor', 'b')
axis([0 N -1.5 1.5])
grid on
set(gca, 'FontSize', nfonts);
xlabel('$k$', 'Interpreter', 'Latex', ...
    'FontSize', nfontslatex)
ylabel('$u(k)$', 'Interpreter', 'Latex', ...
    'FontSize', nfontslatex)
```



Rysunek 4: Wykresy odpowiedzi y na wymuszenie u dla układu z Przykładu 4

3 Zadania

Zadanie 1. Pobrać plik `dataRLS01.mat` i odtworzyć wyniki z Przykładu 2, w szczególności wykresy z Rys. 2.

Tabela 1: Wartości estymat w kolejnych iteracjach dla $P_0 = I$ oraz $\hat{x}_1^{(0)} = 0$ i $\hat{x}_2^{(0)} = 0$.

k	$\hat{x}_1^{(k)}$	$\hat{x}_2^{(k)}$
1	0.9148	-1.1922
2	1.1409	-0.9089
3	3.2650	0.4410
4	7.2354	4.2781
5	8.1422	3.9279
6	8.1631	4.0040
7	8.4482	3.8888
8	8.5624	3.9563
9	8.6433	3.9577
10	8.8983	3.8481
11	9.1027	4.2306
12	9.1286	4.2459
13	9.1336	4.3017
14	9.2878	4.6495
15	9.3097	4.6689
16	9.3707	4.6657
17	9.4015	4.6706
18	9.3899	4.7551
19	9.3928	4.7610
20	9.4074	4.8286

Zadanie 2. [1, 2] Załóżmy, że w zbiorniku mamy roztwór zawierający substancję nr 1, której koncentracja wynosi x_1 oraz substancję nr 2, której koncentracja wynosi x_2 . Do dyspozycji jest aparatura pomiarowa, za pomocą której można zmierzyć łączną koncentrację substancji nr 1 oraz substancji nr 2 tzn. $(x_1 + x_2)$, jednak bez możliwości rozróżnienia substancji. Substancję nr 2 można usuwać ze zbiornika poprzez ługowanie, tak, że jej koncentracja spada o 1% między dwoma pomiarami z których pierwszy ma miejsce przed ługowaniem a drugi

po ługowaniu. Proces ługowania można powtarzać. Równanie pomiaru ma zatem postać

$$\begin{aligned} y_k &= x_1 + 0.99^{k-1}x_2 + v_k \\ &= [1 \quad 0.99^{k-1}]x + v_k \\ &= H_k x + v_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie

$$H_k = [1 \quad 0.99^{k-1}] \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (34)$$

zaś $v_k \in \mathbb{R}$ jest szumem pomiarowym, o zerowej średniej.

Nierekurencyjna metoda LS

Załóżmy, że wykonano N pomiarów. Ponieważ

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.99^0 \\ 1 & 0.99^1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0.99^{N-1} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad (35)$$

to możemy obliczyć estymatę koncentracji

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = A^\dagger y \quad (36)$$

Rekurencyjna metoda LS

Załóżmy, że zaczynamy estymację „od zera”. Załóżmy, że początkowe estymaty mają wartości $\hat{x}_1 = 8.0$ i $\hat{x}_2 = 7.0$. Chcąc estymować dwie rozpatrywane koncentracje możemy skorzystać z rekurencyjnej metody LS w postaci równań

$$K_k = P_{k-1} H_k^T (1 + H_k P_{k-1} H_k^T)^{-1} \quad (37a)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k-1}) \quad (37b)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \quad (37c)$$

Polecenie

Przeprowadź odpowiednie obliczenia używając różnych wartości początkowych wariancji błędu estymacji P_0 . Dane do zadania (tzn. wartości kolejnych pomiarów y_k dla $k = 1, \dots$) znajdują się w pliku `dataRLS02.mat`. Rys. 5 przedstawia estymaty x_1 i x_2 w funkcji numeru kolejnego pomiaru. Obliczenia przeprowadzono dla następujących wartości początkowych wariancji błędu estymacji P_0 : panel (a) $P_0 = I$, panel (b) $P_0 = I \cdot 10^2$, panel (c) $P_0 = I \cdot 10^3$.

Można zauważyć, że dla przypadków (b) i (c) po kilkudziesięciu pomiarach estymaty praktycznie osiągnęły swoje prawdziwe wartości (tzn. wartości początkowych koncentracji rozpatrywanych substancji w roztworze). Przypadek (a) charakteryzuje się wolniejszą, w porównaniu z pozostałymi, zbieżnością.

Załóżmy, że początkowe wartości estymat wynoszą $\hat{x}_1 = 8.0$ i $\hat{x}_2 = 7.0$. Wyznacz kolejne wartości estymat korzystając z równań (37) i wykonaj ich wykres tak jak to przedstawiono na Rys. 5 [panele (a), (b), i (c)]. Dodatkowo, zadanie można również wykonać dla innych wartości początkowych estymat (Rys. 6).

Tabela 2: Wartości estymat w kolejnych iteracjach dla $P_0 = I \cdot 10^2$ oraz $\hat{x}_1^{(0)} = 8.0$ i $\hat{x}_2^{(0)} = 7.0$.

k	$\hat{x}_1^{(k)}$	$\hat{x}_2^{(k)}$
1	8.0053	7.0053
2	8.0284	7.0052
3	8.0027	7.0182
4	8.0506	6.9837
5	8.1028	6.9406
6	8.1338	6.9132
7	8.2102	6.8426
8	8.3266	6.7322
9	8.5533	6.5130
10	8.7440	6.3259
11	8.7919	6.2783
12	8.9890	6.0809
13	9.0934	5.9755
14	9.1673	5.9004
15	9.2603	5.8053
16	9.3191	5.7448
17	9.3764	5.6856
18	9.4687	5.5897
19	9.5463	5.5087
20	9.6131	5.4386

Zadanie 3. Załóżmy, że zaczynamy estymację „od zera”. Załóżmy, że początkowe estymaty mają wartości $\hat{x}_1 = 8$ i $\hat{x}_2 = 7$ oraz, że początkowa wartość macierzy wariancji błędu estymacji wynosi $P_0 = I$. Rekurencyjny algorithm LS, który *uwzględnia wariancję szumu pomiarowego* ma postać równań

$$K_k = P_{k-1} H_k^T (H_k P_{k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (38a)$$

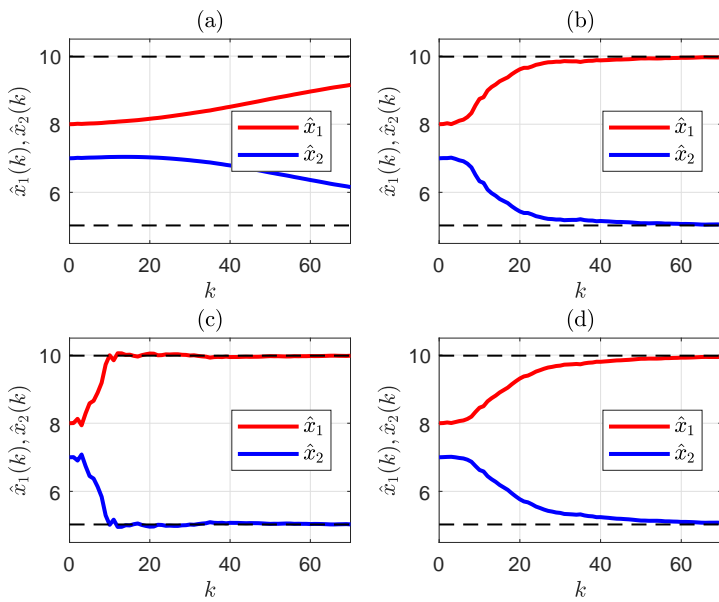
$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k-1}) \quad (38b)$$

$$\begin{aligned} P_k &= (I - K_k H_k) P_{k-1} (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T \\ &= (I - K_k H_k) P_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (38c)$$

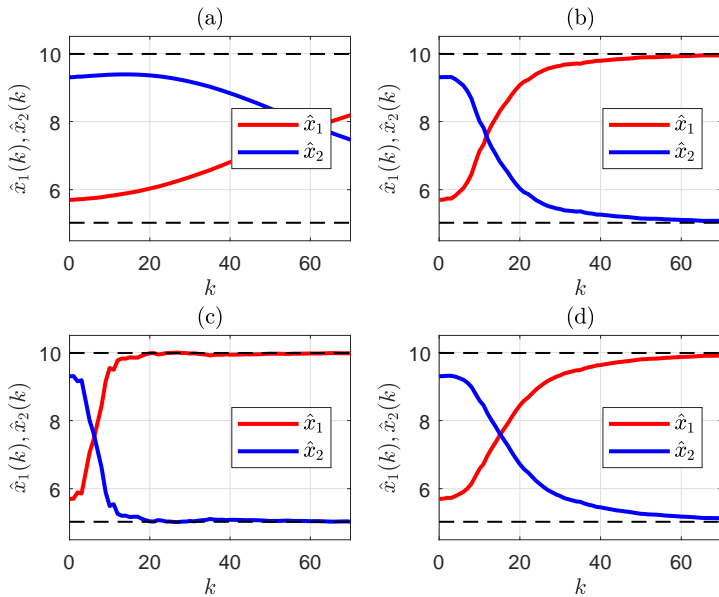
Algorytm ten jest szczególnym przypadkiem filtru Kalmana. Rysunek 5 [panel (d)] przedstawia estymaty \hat{x}_1 i \hat{x}_2 w funkcji numerów kolejnych pomiarów. Obliczenia przeprowadzono dla $R_k = 0.02$, $k = 1, 2, \dots$, które wynikają z wariancji szumu. Można zauważyć, że po kilkudziesięciu pomiarach estymaty praktycznie osiągnęły swoje prawdziwe wartości (tzn. wartości początkowych koncentracji rozpatrywanych substancji w roztworze).

Polecenie

Zakładając początkowe wartości estymat $\hat{x}_1 = 8.0$ i $\hat{x}_2 = 7.0$, oraz $P_0 = I$, $R_k = 0.02$ dla $k = 1, \dots$ wyznacz kolejne estymaty (38) i wykonaj ich wykresy tak jak to przedstawia Rys. 5 [panel (d)]. Dane do zadania (tzn. wartości kolejnych pomiarów y_k dla $k = 1, \dots$) znajdują się w pliku `dataRLS02.mat`. Dodatkowo, zadanie można również wykonać dla innych wartości początkowych estymat (Rys. 6).



Rysunek 5: Estymaty \hat{x}_1 i \hat{x}_2 koncentracji x_1 i x_2 . Panele (a), (b), oraz (c) zgodnie z równaniami (37) dla $P_0 = I$, $P_0 = I \cdot 10^2$, i $P_0 = I \cdot 10^3$, odpowiednio. Panel (d) zgodnie z równaniami (38) dla $R_k = 0.02$, $k = 1, 2, \dots$, i $P_0 = I$. Warunki początkowe: $\hat{x}_1(0) = 8.0$ i $\hat{x}_2(0) = 7.0$. Czarnymi przerywanymi liniami zaznaczono wartości estymat otrzymanych metodą nierekurencyjną [wzory (35) i (36)], odpowiednio, $\hat{x}_1 = 9.9841$ i $\hat{x}_2 = 5.0278$



Rysunek 6: Estymaty \hat{x}_1 i \hat{x}_2 koncentracji x_1 i x_2 . Panele (a), (b), oraz (c) zgodnie z równaniami (37) dla $P_0 = I$, $P_0 = I \cdot 10^2$, i $P_0 = I \cdot 10^3$, odpowiednio. Panel (d) zgodnie z równaniami (38) dla $R_k = 0.02$, $k = 1, 2, \dots$, i $P_0 = I$. Warunki początkowe: $\hat{x}_1(0) = 5.7$ i $\hat{x}_2(0) = 9.3$. Czarnymi przerywanymi liniami zaznaczono wartości estymat otrzymanych metodą nierekurencyjną [wzory (35) i (36)], odpowiednio, $\hat{x}_1 = 9.9841$ i $\hat{x}_2 = 5.0278$

4 Lemat o odwracaniu macierzy

Lemat 1. (Lemat o odwracaniu macierzy, ang. *matrix inversion lemma*) Niech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, oraz $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Jeżeli wszystkie odwrotności w (39) istnieją to prawdziwa jest zależność

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}. \quad (39)$$

Dowód tego lematu można przeprowadzić bezpośrednim rachunkiem, więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w [1, 2].

Ze wzoru (39) wynika, że dla $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$(A + VV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}V(I + V^T A^{-1}V)^{-1}V^T A^{-1}$$

w szczególności, dla $v \in \mathbb{R}^n$

$$(A + vv^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}v(1 + v^T A^{-1}v)^{-1}v^T A^{-1} \quad (40)$$

W literaturze anglojęzycznej równanie (40) jest znane pod nazwą *rank-one perturbation formula*.

5 Uwagi końcowe

Modelując związki rekurencyjne w środowisku Matlab® należy zwrócić uwagę, że elementy tablic są numerowane (indeksowane) od jedynki, a nie jak w wielu innych językach programowania - od zera. Wymuszenia, stany i odpowiedzi układów dyskretnych z reguły numeruje się od zera, co może prowadzić do pomyłek. Należy zawsze bardzo starannie sprawdzać zakres zbieżności indeksu dla danej zmiennej. Przykładowo, po wygenerowaniu w środowisku Matlab® wykresów z Przykładu 4 i powiększeniu ich, uważna osoba dostrzeże, że odpowiedzi $y(k)$ kończą się na indeksie $k = 120$, podczas gdy wymuszenia $u(k)$ kończą się na indeksie o jeden mniejszym, czyli $k = 119$. Osoby, które nie potrafią wyjaśnić dlaczego tak jest, powinny uważnie przyrzeć się równaniom (28).

Literatura

- [1] G.C. Calafiore and L. El Ghaoui. *Optimization Models. Control systems and optimization series*. Cambridge University Press, October 2014.
- [2] D. Simon. *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, 2006.