1DE2150:A - Modele i identyfikacja układów dynamicznych, lab.
Wyznaczanie parametrów Markowa za pomocą szybkiej transformaty Fouriera

Maciej Twardy

Materiał przygotowany w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój - Współpraca”. Projekt współfinansowany przez Unie Europejska w ramach Europejskiego Funduszu Społeczego. Program Operacyjny Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020, Os priorytetowa III Szkolnictwo Wyzsze dla gospodarki i rozwoju, Działanie 3.5 Kompleksowe programy szkół wyższych.

1 Wstęp

1.1 Dyskretna transformata Fouriera

Weźmy pod uwagę ciąg

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\}, \quad N = 2^n. \tag{1}$$

następnie zdefiniujmy, dla $i = 0, \ldots, N-1$

$$\hat{h}_i = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}k}, \tag{2}$$

otrzymany w ten sposób ciąg

$$\left\{\hat{h}_0, \hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{N-1}\right\}, \quad N = 2^n, \tag{3}$$

nazywamy dyskretną transformatą Fouriera ciągu (1). Bezpośrednim rachunkiem można wykazać, że

$$\hat{h} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}_k e^{\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}k} \tag{4}$$

Wzór (2) definiuje dyskretną transformatę Fouriera (ang. *discrete Fourier transform, DFT*),

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\} \xrightarrow{\text{DFT}} \left\{\hat{h}_0, \hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{N-1}\right\}, \tag{5}$$

zaś wzór (4) odwrotną dyskretną transformatę Fouriera.
Weźmy pod uwagę funkcje f i $\hat{f}$ które są związane zależnością

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{6}$$

Załóżmy, że poza przedziałem $[a, b]$ funkcja f jest równa 0. Oznaczmy $d = b - a$ i podzielmu przedział $[a, b]$ na N odcinków, każdy o długości d/N. Mamy

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{b-a} f(t+a)e^{-\mathrm{i}\omega(t+a)}\mathrm{d}t \\ &= e^{-\mathrm{i}\omega a}\int_0^{b-a} f(t+a)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= e^{-\mathrm{i}\omega a}\int_0^{d} f(t+a)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &\approx e^{-\mathrm{i}\omega a}\frac{d}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(k\frac{d}{N}+a\right)e^{-\mathrm{i}\omega k\frac{d}{N}}\end{aligned} \tag{7}$$

zatem dla $\omega = 2\pi l/d$ mamy

$$\begin{aligned}\hat{f}\left(\frac{2\pi l}{d}\right) &= e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi l a}{d}}\frac{d}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(k\frac{d}{N}+a\right)e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi l k d}{N d}} \\ &= e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi l a}{d}}\frac{d}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(k\frac{d}{N}+a\right)e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi l k}{N}},\end{aligned} \tag{8}$$

w dalszym ciągu przyjmiemy oznaczenie

$$\hat{f}_{-l} = \hat{f}\left(\frac{2\pi l}{d}\right). \tag{9}$$

Korzystając z powyższych zależności otrzymujemy

$$\hat{f}_{-l} = \hat{f}_l^* \tag{10}$$

oraz

$$\begin{aligned}\hat{f}_{N-l} &= e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(N-l)a}{d}}\frac{d}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(k\frac{d}{N}+a\right)e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(N-l)k}{N}} \\ &= e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi N a}{d}}e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi l a}{d}}\frac{d}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(k\frac{d}{N}+a\right)e^{\mathrm{i}\frac{2\pi l k}{N}} \\ &= e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi N a}{d}}\hat{f}_{-l}\end{aligned} \tag{11}$$

zatem

$$\hat{f}_{-l} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi N a}{d}}\hat{f}_{N-l}. \tag{12}$$

Biorąc pod uwagę powyższe, widzimy, że możemy wyznaczyć przybliżone wartości funkcji $\hat{f}$ w wybranych punktach, korzystając z DFT dla spróbkowanych wartości funkcji f.

Przykład 1. Weźmy pod uwagę funkcję

$$f(t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{13}$$

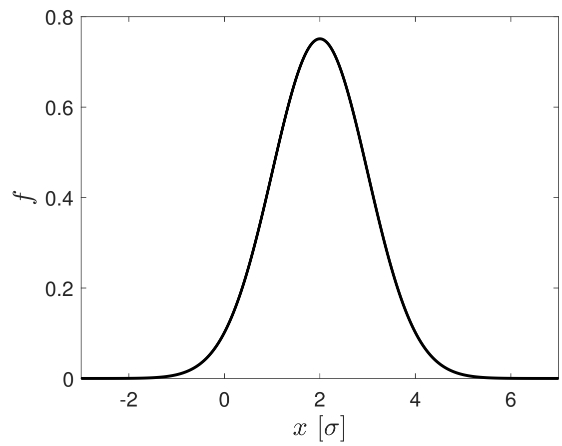
Mamy

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \sigma\sqrt{2\pi}e^{-\mathrm{i}\omega t_0}e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}\end{aligned} \tag{14}$$

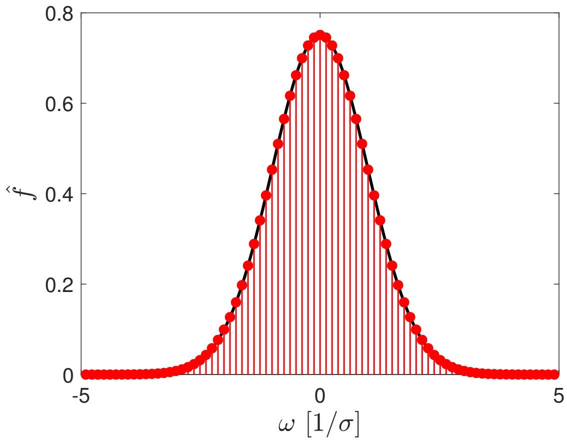
w szczególności

$$|f(\omega)| = \sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} \tag{15}$$

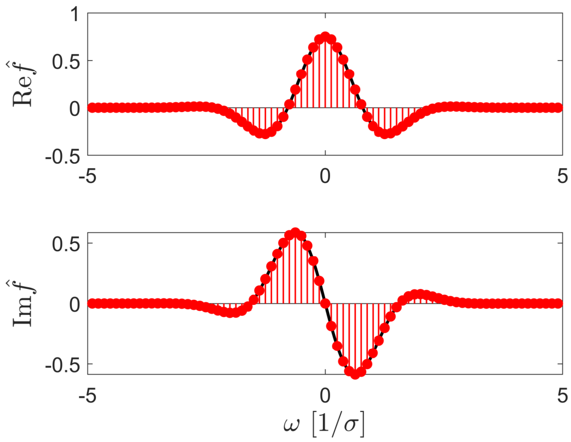
Przyjmując $\sigma = 1$ otrzymujemy wyniki przedstawione na Rys. 1-3



Rysunek 1: Wykres funkcji (13).



Rysunek 2: Wykres transformaty Fouriera funkcji (13).



Rysunek 3: Wykres funkcji (13), panel górny – część rzeczywista, panel dolny – część urojona.

1.2 Parametry Markowa

Rozważmy układ dyskretny SISO n-tego rzędu opisany równaniami stanu

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \ , \tag{16a}$$
$$y_k = Cx_k \ , \tag{16b}$$

gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ Równaniom (16) odpowiada macierz ternsmitancji

$$H(z) = C(Iz - A)^{-1}B. \tag{17}$$

Dla układu (16) definiujemy tzw. parametry Markowa $h_1, \ldots, h_k, \ldots$

$$h_1 = CB,\ \ h_2 = CAB,\ \ \ldots\ \ ,\ \ h_k = CA^{k-1}B,\ \ \ldots \tag{18}$$

ogólnie

$$h_k = CA^{k-1}B, \qquad h_k \in \mathbb{R}^{p\times m}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Weźmy pod uwagę przekształcenie przez podobieństwo

$$(A, B, C) \xrightarrow{P} (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}) = (\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{C}), \tag{20}$$

tzn. $\tilde{A} = PAP^{-1}, \tilde{B} = PB, \tilde{C} = CP^{-1}$. Macierze $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ opisują pewien model w przestrzeni stanu, któremu odpowiada transmitancja $\tilde{H}(z) = \tilde{C}(Iz - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$. Ponieważ $\tilde{H}(z) = H(z)$ (co można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem), mówimy, że transmitancja jest niezmiennikiem przekształcenia przez podobieństwo. Ponieważ jedynym warunkiem nałożonym na macierz P jest jej odwracalność, to oznacza to, że danej transmitancji odpowiada nieskończenie wiele modeli w przestrzeni stanu. Zauważmy, że parametry Markowa (18), podobnie jak transmitancja, również są niezmiennicze względem przekształcenia przez podobieństwo

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_1 &= \tilde{C}\tilde{B} = CP^{-1}PB = CB = h_1,\\
\tilde{h}_2 &= \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} = CP^{-1}PAP^{-1}PB = CAB = h_2,\\
&\ \vdots\\
\tilde{h}_k &= \tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B} = CP^{-1}(PAP^{-1})^kPB\\
&= CP^{-1}PA^kP^{-1}PB = CA^kB = h_k,\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Zuaważmy, że dla wymuszenia iech $u_i(0) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$ oraz $u_i(k) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $k = 1, 2, \ldots$. Dla takiego wymuszenia, przy zerowych warunkach początkowych, tzn. $x_0 = 0$ mamy $y_0 = 0$, $y_1 = CB = h_1$, $y_2 = CAB = h_2$, ogólnie $y_k = CA^{k-1}B = h_k$. Zatem parametry Markowa są niczym innym jak wartościami odpowiedzi impulsowej układu.

1.3 Dyskretna transformata Fouriera

Weźmy pod uwagę ciąg

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\}, \quad N = 2^n. \tag{21}$$

Poddając ten ciąg dyskretnej transformacie Fouriera otrzymujemy

$$\left\{\hat{h}_0, \hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{N-1}\right\}, \quad N = 2^n, \tag{22}$$

gdzie

$$\hat{h}_i = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}k}. \tag{23}$$

Bezpośrednim rachunkiem można wykazać, że

$$\hat{h} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \hat{h}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}k} \tag{24}$$

Wzór (23) definiuje dyskretną transformatę Fouriera (ang. *discrete Fourier transform, DFT*),

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\} \xrightarrow{\mathrm{FFT}} \left\{\hat{h}_0, \hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{N-1}\right\}, \tag{25}$$

zaś wzór (24) odwrotną dyskretną transformatę Fouriera.

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\} \xleftarrow{\mathrm{IFFT}} \left\{\hat{h}_0, \hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{N-1}\right\}. \tag{26}$$

Szybka transformata Fouriera (ang. *fast Fourier transform, FFT*) jest jedynie pewnym sposobem wyznaczania dyskretnej transformaty Fouriera, jednak tak ważnym, że właściwie mówiąc o DFT mamy na myśli FFT. Ogólnie obydwa ciągi, zarówno (21) jak i (22) mogą być zespolone, ale w rozpatrywanym przez nas kontekście, ciąg (21) będzie zawsze rzeczywisty, tzn.

$$h_0, h_1, \ldots, h_{N-1} \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Zauważmy, że przy takim założeniu mamy

$$\begin{aligned}\hat{h}_{-i} &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}k}\right)^* \\ &= \hat{h}_i^* \end{aligned} \tag{28}$$

a także

$$\begin{aligned}\hat{h}_{i+N} &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi(i+N)}{N}k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}k} \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi k}}_{=1} \\ &= \hat{h}_i. \end{aligned} \tag{29}$$

W taki sam sposób możemy pokazać, że

$$\hat{h}_{i+pN} = \hat{h}_i \quad \text{dla } p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{30}$$

Ponadto, mamy

$$\hat{h}_i = \hat{h}_{i-N} = \hat{h}^*_{N-i}, \tag{31}$$

$$\hat{h}_0 = \sum_{k=0}^{N-1} h_k, \tag{32}$$

$$\hat{h}_{\frac{N}{2}} = \hat{h}_{\frac{N}{2}-N} = \hat{h}_{-\frac{N}{2}} = \hat{h}_{\frac{N}{2}^*}. \tag{33}$$

1.4 DFT i transmitancja układu z czasem dyskretnym

Weźmy pod uwagę układ dyskretny

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{34}$$

$$y_k = Cx_k, \tag{35}$$

któremu odpowiada transmitancja

$$H(z) = C(Iz - A)^{-1}B. \tag{36}$$

Dla stabilnego układu dyskretnego, co ma miejsce gdy wszystkie wartości własne macierzy A znajdują się wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej, zachodzi

$$(Iz - A)^{-1} = Iz^{-1} + Az^{-2} + A^2z^{-3} + \ldots \tag{37}$$

co można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Oznaczmy

$$h_0 = 0, \quad h_1 = CB, \quad h_2 = CAB, \quad \ldots, h_k = CA^{k-1}B, \ldots \tag{38}$$

Zauważmy, że powyższy ciąg jest odpowiedzią impulsową (przy zerowych warunkach początkowych) rozpatrywanego układu. Ponieważ $H(z) = C(Iz - A)^{-1}B$ jest transformatą $\mathcal{Z}$ ciągu (38), czyli transmitancja $H(z)$ jest transformatą $\mathcal{Z}$ odpowiedzi impulsowej układu. Ponieważ $Y(z) = H(z)U(z)$, a mnożeniu transformat odpowiada splot oryginałów, to znaczy, że odpowiedź układu na dowolny ciąg wymuszeń $u_0, u_1, \ldots$ jest splotem tego ciągu i odpowiedzi impulsowej układu. Kolejne wartości odpowiedzi impulsowej $h_0, h_1, \ldots$ nazywamy parametrami Markowa. Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona każda macierz postaci A^m dla $m \geq n$ może być wyrażona jako kombinacja macierzy $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$, a współczynniki tej kombinacji można wyznaczyć, oznacza to, że jeśli znamy $h_0, h_1, \ldots, h_n$ pierwszych parametrów Markowa to możemy wyznaczyć pozostałe. Innymi słowy parametry Markowa $h_0, h_1, \ldots, h_n$ wyznaczają jednoznacznie wszystkie kolejne.
Mamy dwa ciągi wartości, odpowiednio, sygnału wymuszenia

$$\{u_0, u_1, \ldots\} \tag{39}$$

oraz odpowiedzi

$$\{y_0, y_1, \ldots\} \tag{40}$$

Przy zerowych warunkach początkowych mamy

$$Y(z) = H(z)U(z). \tag{41}$$

Mamy

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}, \quad Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}. \tag{42}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}}. \tag{43}$$

Jeśli dla $k \geq N$ $y_k, u_k = 0$ to

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} y_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} u_k z^{-k}}. \tag{44}$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$\hat{h}_i = H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}i}\right), \tag{45}$$

wówczas

$$\hat{h}_i = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}k}. \tag{46}$$

Jeśli dla $k \geq N$ $h_k = 0$ to

$$\hat{h}_i = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}k}. \tag{47}$$

czyli ciąg

$$\left\{\hat{h}_0, \hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{N-1}\right\} \tag{48}$$

można otrzymać przez FFT ciągu

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\}. \tag{49}$$

Tak samo ciąg

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\}. \tag{50}$$

można otrzymać przez IFFT

$$\left\{\hat{h}_0, \hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{N-1}\right\} \tag{51}$$

. To samo można powiedzieć o parach ciągach

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}\}, \qquad \{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{N-1}\} \tag{52}$$

oraz

$$\{y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}\}, \qquad \{\hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{N-1}\}. \tag{53}$$

Zauważmy, że

$$\hat{h}_i = \frac{\hat{y}_i}{\hat{u}_i}, \quad i = 0, \ldots, N-1 \tag{54}$$

mamy

$$\begin{aligned}\hat{h}_i &= H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}i}\right) \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{N-1} y_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}K}}{\sum_{k=0}^{N-1} u_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi i}{N}K}} \\ &= \frac{\hat{y}_i}{\hat{u}_i}. \end{aligned} \tag{55}$$

Wynika stąd następujący sposób wyznaczenia ciągu $\{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\}$. Wykonujemy FFT ciągów $\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}\}$ i $\{y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}\}$, następnie wyznaczyć ciąg $\left\{\hat{h}_0, \hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{N-1}\right\}$ a następnie wykonać IFFT na tym ciągu.

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}\} \xrightarrow{\text{FFT}} \{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{N-1}\}, \tag{56}$$

$$\{y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}\} \xrightarrow{\text{FFT}} \{\hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{N-1}\}, \tag{57}$$

$$\hat{h}_i = \frac{\hat{y}_i}{\hat{u}_i}, \quad i = 0, \ldots, N-1 \tag{58}$$

$$\left\{\hat{h}_0, \hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{N-1}\right\}. \xrightarrow{\text{IFFT}} \{h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\} \tag{59}$$

Zauważmy, że jeśli utworzymy ciąg

$$\left\{\frac{2\pi}{N} \cdot 1, \frac{2\pi}{N} \cdot 2, \ldots, \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}\right\} \tag{60}$$

oznaczmy go

$$\left\{\omega_1, \ldots, \omega_{\frac{N}{2}}\right\}, \tag{61}$$

to wykres, odpowiednio, $20\log_{10}(|\hat{h}_i|)$, $i = 1, \ldots, \frac{N}{2}$, oraz $\arg(h_i)$, $i = 1, \ldots, \frac{N}{2}$, w funkcji ω_i, $i = 1, \ldots, \frac{N}{2}$ daje nam $\frac{N}{2}$ dyskretnych punktów charakterystyki Bodego rozpatrywanego układu.

Przykład 2. Weźmy pod uwagę układ dyskretny

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{62a}$$

$$y_k = Cx_k, \tag{62b}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0.1898 & -0.4855 \\ 0.4855 & 0.1898 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.1450 \\ -0.8940 \end{bmatrix} \tag{63a}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.2410 & 0.4258 \end{bmatrix}, \tag{63b}$$

Powyższym równaniom stanu odpowiada transmitancja

$$H(z) = C(Iz - A)^{-1}B, \tag{64}$$

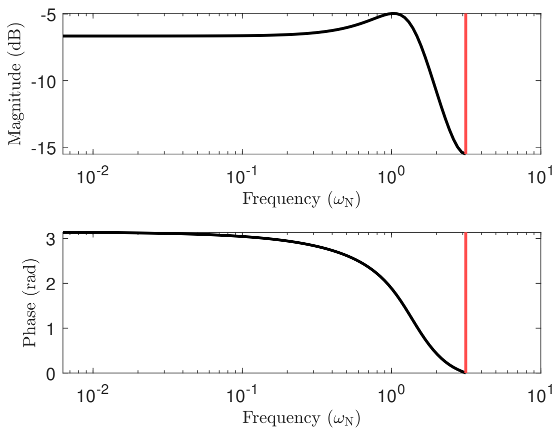
uwzględniając (63) otrzymujemy

$$H(z) = \frac{-0.3457z^{-1} - 0.0690z^{-2}}{1 - 0.3796z^{-1} + 0.2717z^{-2}}, \tag{65}$$

czyli

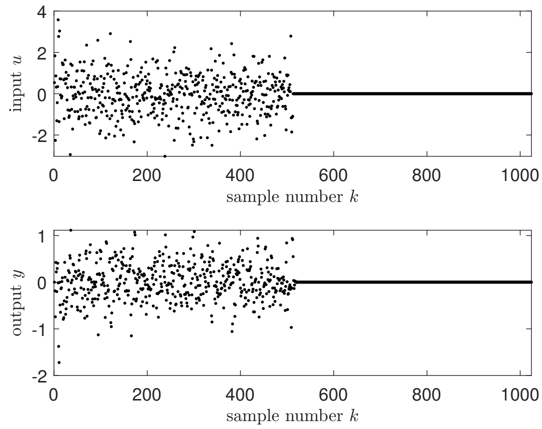
$$H(z) = \frac{-0.3457z - 0.0690}{z^2 - 0.3796z + 0.2717}, \tag{66}$$

Na Rys. 4 przedstawiono wykres Bodego dla tego układu.



Rysunek 4: Wykres Bodego

Następnie, przy zerowych warunkach początkowych, podano sygnał wymuszenia złożony z N = 1024 próbek, $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$, przy czym pierwsza połowa próbek to wartości (pseudo)losowe, natomiast druga połowa to wartości zerowe. Zarejestrowano (obliczono) wartości odpowiedzi układu, $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$. Wykresy obydwu sygnałów przedstawia Rys. 5



Rysunek 5: Wykresy sygnałów wymuszenia i odpowiedzi układu

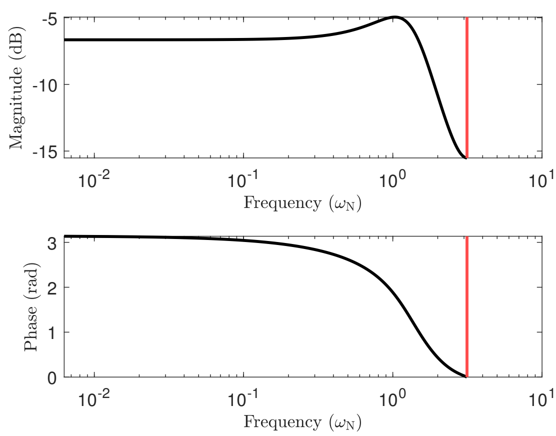
Następnie na obydwu ciągach wykonano FFT i otrzymane wyniki podzielono jedne przez drugi, element po elemencie, zgdnie ze wzorem

$$\hat{h}_i = \frac{\hat{y}_i}{\hat{u}_i}, \quad i = 0, \ldots, N-1 \tag{67}$$

Następnie wykonano wykresy wartości $20\log_{10}(|\hat{h}_i|)$, $i = 1, \ldots, \frac{N}{2}$, oraz $\arg(h_i)$, $i = 1, \ldots, \frac{N}{2}$, w funkcji ω_i, $i = 1, \ldots, \frac{N}{2}$ dla

$$\left\{\omega_1, \ldots, \omega_{\frac{N}{2}}\right\} = \left\{\frac{2\pi}{N} \cdot 1, \frac{2\pi}{N} \cdot 2, \ldots, \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}\right\}. \tag{68}$$

Otrzymując wynik przedstawiony na Rys. 6



Rysunek 6: Wykres Bodego na podstawie FFT parametrów Markowa

Na koniec, w celu dodatkowej weryfikacji wyników, wyznaczono parametry Markowa układu ze wzoru (38) i porównano z ciągiem otrzymanymi przez IFFT ciągu $\{\hat{h}_0, \ldots, \hat{h}_{N-1}\}$, otrzymując pełną zgodność. Tabela 1 przedstawia wartości pierwszych kilku parametrów Markowa rozpatrywanego układu.

Tabela 1

	IFFT	wzór (38)
h_0	-0.0000	0
h_1	-0.3457	-0.3457
h_2	-0.2002	-0.2002
h_3	0.0179	0.0179
h_4	0.0612	0.0612
h_5	0.0184	0.0184
h_6	-0.0097	-0.0097
h_7	-0.0087	-0.0087

2 Zadania

Zadanie 1. Powtórzyć obliczenia z Przykładu 2 i wykonać odpowiednie wykresy.

Literatura

[1] Richard G Lyons. *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2010.

[2] Jer-Nan Juang and Minh Q Phan. *Identification and Control of Mechanical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[3] Jer-Nan Juang. *Applied System Identification*. Pearson Collage Div, 1994.