1DE2150:A - Modele i identyfikacja układów dynamicznych, lab.
Wyznaczanie realizacji w przestrzeni stanu metodą ERA

Maciej Twardy

Materiał przygotowany w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka – Edukacja – Rozwój - Współpraca”. Projekt współfinansowany przez Unie Europejska w ramach Europejskiego Funduszu Społeczego. Program Operacyjny Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020, Os priorytetowa III Szkolnictwo Wyzsze dla gospodarki i rozwoju, Działanie 3.5 Kompleksowe programy szkół wyższych.

1 Parametry Markowa i macierze Hankela

Rozważmy ściśle właściwy układ dyskretny n-tego rzędu opisany równaniami stanu

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \ , \tag{0a}$$
$$y_k = Cx_k \ , \tag{0b}$$

gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ zaś m i p oznaczają, odpowiednio, liczbę wyjść i układu. Równaniom (1) odpowiada macierz ternsmitancji

$$H(z) = C(Iz - A)^{-1}B. \tag{1}$$

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że realizacja (A, B, C) jest minimalna, tzn. że układ jest sterowalny i obserwowalny, w szczególnosci rząd macierzy obserwowalności R_o i sterowalności R_c jest równy n

$$\operatorname{rank} R_\mathrm{o} = n, \qquad \operatorname{rank} R_\mathrm{c} = n, \tag{2}$$

gdzie

$$R_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(np)\times n}, \tag{3}$$

$$R_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(mp)}. \tag{4}$$

Innymi słowy, macierz obserwowalności R_o jest pełnego rzędu kolumnowego, a macierz sterowalności R_c jest pełnego rzędu wierszowego. Zdefiniujmy macierz, tzw. pierwszą macierz Hankela

$$H_1 = R_\mathrm{o}R_\mathrm{c}. \tag{5}$$

Mamy

$$H_1 = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \dots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(np)\times(nm)}. \tag{6}$$

Warunek (2) implikuje $\operatorname{rank} H_1 = n$.
Dla układu (1) definiujemy tzw. parametry Markowa $h_1, \dots, h_k, \dots$

$$h_1 = CB, \ \ h_2 = CAB, \ \dots \ , \ h_k = CA^{k-1}B, \ \dots \tag{7}$$

ogólnie

$$h_k = CA^{k-1}B, \qquad h_k \in \mathbb{R}^{p\times m}, \qquad k = 1, 2, \dots \tag{8}$$

Weźmy pod uwagę przekształcenie przez podobieństwo

$$(A, B, C) \xrightarrow{P} (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}) = (\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{C}), \tag{9}$$

tzn. $\tilde{A} = PAP^{-1}, \tilde{B} = PB, \tilde{C} = CP^{-1}$. Macierze $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ opisują pewien model w przestrzeni stanu, któremu odpowiada transmitancja $\tilde{H}(z) = \tilde{C}(Iz - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$. Ponieważ $\tilde{H}(z) = H(z)$ (co można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem), mówimy, że transmitancja jest niezmiennikiem przekształcenia przez podobieństwo. Ponieważ jedynym warunkiem nałożonym na macierz P jest jej odwracalność, to oznacza to, że danej transmitancji odpowiada nieskończenie wiele modeli w przestrzeni stanu. Zauważmy, że parametry Markowa (7), podobnie jak transmitancja, również są niezmiennicze wględem przekształcenia przez podobieństwo

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= \tilde{C}\tilde{B} = CP^{-1}PB = CB = h_1, \\ \tilde{h}_2 &= \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} = CP^{-1}PAP^{-1}PB = CAB = h_2, \\ &\vdots \\ \tilde{h}_k &= \tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B} = CP^{-1}(PAP^{-1})^kPB \\ &\qquad = CP^{-1}PA^kP^{-1}PB = CA^kB = h_k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla realizacji

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}), \tag{10}$$

macierze obserwowalności i sterowalności są dane, odpowiednio, przez

$$\tilde{R}_\mathrm{o} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(np)\times n} \tag{11}$$

$$\tilde{R}_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{A}^2\tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(mp)}. \tag{12}$$

czyli

$$\tilde{R}_\mathrm{o} = R_\mathrm{o}P^{-1}, \qquad \tilde{R}_\mathrm{c} = PR_\mathrm{c}. \tag{13}$$

Mamy

$$\tilde{R}_\mathrm{o}\tilde{R}_\mathrm{c} = R_\mathrm{o}P^{-1}PR_\mathrm{c} = R_\mathrm{o}R_\mathrm{c} = H_1. \tag{14}$$

Tak zawana druga macierz Hankela jest zdefiniowana wzorem $H_2 = R_\mathrm{o}AR_\mathrm{c}$, mamy

$$\tilde{R}_\mathrm{o}\tilde{A}\tilde{R}_\mathrm{c} = R_\mathrm{o}P^{-1}PAP^{-1}PR_\mathrm{c} = R_\mathrm{o}AR_\mathrm{c} = H_2. \tag{15}$$

Macierze Hankela są niezmiennicze względem przekształcenia przez podobieństwo, co nie powinno być zaskakujące, jeśli weźmie się pod uwagę, że ich elemantami są parametry Markowa, które są niezmiennicze względem przekształcenia przez podobieństwo.
Postawmy teraz następujący problem. Niech będą dane macierze Hankela H_1 i H_2, odpowiadające pewnej realizacji (A, B, C), chcemy wyznaczyć jakąś realizację stopnia n, dla tych macierzy, $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$. Słowo „jakąś” wynika stąd, że jak już wiemy, takich realizacji jest nieskończenie wiele. Problem

ten możemy rozwiązać następująco, załóżmy, że (zwarty) rozkład SVD macierzy H_1 jest postaci $H_1 = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$. Zróbmy teraz następujący *Ansatz*

$$H_1 = U\Sigma V^{\mathrm{T}} = \tilde{R}_{\mathrm{o}}\tilde{R}_{\mathrm{c}}, \tag{16}$$

gdzie

$$\tilde{R}_{\mathrm{o}} = U\Sigma^{\frac{1}{2}}, \qquad \tilde{R}_{\mathrm{c}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}V^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

Jeżeli nasz Ansatz jest prawdziwy, to musimy mieć

$$R_{\mathrm{o}}P^{-1} = \tilde{R}_{\mathrm{o}} = U\Sigma^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow P = \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}R_{\mathrm{o}} \tag{18}$$

$$PR_{\mathrm{c}} = \tilde{R}_{\mathrm{c}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}V^{\mathrm{T}} \Longrightarrow P^{-1} = R_{\mathrm{c}}V\Sigma^{-\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Powinniśmy otrzymać $PP^{-1} = P^{-1}P = I$. Istotnie mamy Zauważmy najpierw, że $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz

$$\begin{aligned} PP^{-1} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}R_{\mathrm{o}}R_{\mathrm{c}}V\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}H_1V\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}U\Sigma V^{\mathrm{T}}V\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= I. \end{aligned} \tag{20}$$

Ponieważ dla macierzy kwadratowej może istnieć co najwyżej jedna macierz odwrotna, to mamy

$$\begin{aligned} P^{-1}P &= R_{\mathrm{c}}V\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}R_{\mathrm{o}} \\ &= R_{\mathrm{c}}V\Sigma^{-1}U^{\mathrm{T}}R_{\mathrm{o}} \\ &= R_{\mathrm{c}}H_1^{\dagger}R_{\mathrm{o}} \\ &= R_{\mathrm{c}}(R_{\mathrm{o}}R_{\mathrm{c}})^{\dagger}R_{\mathrm{o}} \\ &= I. \end{aligned} \tag{21}$$

Zauważmy, że rzeczywiście, dla takiej macierzy P, mamy

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mathrm{c}} &= PR_{\mathrm{c}} \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}R_{\mathrm{o}}R_{\mathrm{c}} \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}H_1 \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}U\Sigma V^{\mathrm{T}} \\ &= \Sigma^{\frac{1}{2}}V^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{22}$$

oraz

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mathrm{o}} &= R_{\mathrm{o}}P^{-1} \\ &= R_{\mathrm{o}}R_{\mathrm{c}}V\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= H_1V\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= U\Sigma V^{\mathrm{T}}V\Sigma^{-\frac{1}{2}} \\ &= U\Sigma^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{23}$$

Widzimy zatem, że jeśli macierz Hankela $H_1 = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ odpowiada realizacji (A, B, C), to dla macierzy

$$\tilde{R}_{\mathrm{o}} = U\Sigma^{\frac{1}{2}}, \qquad \tilde{R}_{\mathrm{c}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}V^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

mamy

$$\tilde{R}_{\mathrm{o}} = R_{\mathrm{o}}P^{-1}, \qquad \tilde{R}_{\mathrm{c}} = PR_{\mathrm{c}}, \tag{25}$$

gdzie, R_{o}, R_{c} są macierzami, odpowiednio, obserwowalności i setrowalności, dla realizacji (A, B, C). Zatem macierze $\tilde{R}_{\mathrm{o}}$, $\tilde{R}_{\mathrm{c}}$ są macierzami, odpowiednio, obserwowalności i setrowalności, dla realizacji (PAP^{-1}, PB, CP^{-1}), którą oznaczamy $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$. Wyznaczeie macierzy $\tilde{B}$ i $\tilde{C}$ jest stosunkowo proste. Mamy

$$\tilde{R}_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(np)\times n} \tag{26}$$

$$\tilde{R}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{A}^2\tilde{B} & \ldots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(mp)}. \tag{27}$$

zatem

$$\tilde{B} = \tilde{R}_{\mathrm{c}}\begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{27a}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}\tilde{R}_{\mathrm{o}}. \tag{27b}$$

Natomiast macierz $\tilde{A}$ można wyznaczyć następująco. Mamy

$$H_2 = R_{\mathrm{o}}AR_{\mathrm{c}} = R_{\mathrm{o}}P^{-1}PAP^{-1}PR_{\mathrm{c}} = \tilde{R}_{\mathrm{o}}\tilde{A}\tilde{R}_{\mathrm{c}}, \tag{28}$$

zatem

$$H_2 = U\Sigma^{\frac{1}{2}}\tilde{A}\Sigma^{\frac{1}{2}}V^{\mathrm{T}}. \tag{29}$$

Mnożąc to równanie lewostronnie przez U^{T}, prawostronnie przez V, a następnie lewostronnie i prawostronnie przez $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$, otrzymujemy

$$\tilde{A} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}H_2V\Sigma^{-\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

Parametrów Markowa będziemy używać do wyznaczenia *realizacji* układu, czyli zanlezienia trójki macierzy $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ i $\tilde{C}$ dla której $\tilde{H}(z) = \tilde{C}(Iz - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$. Każdy układ ma nieskończenie wiele realizacji, wszystkie one mają tę samą trensmitancję. *Realizacją minimalną* nazywamy realizację w której macierz A ma najmniejszy stopień, spośród wszystkich innych realizacji o tej samej transmitancji. Każdy układ posiada nieskończenie wiele realizacji minimalnych, dla dowolnych dwóch takich realizacji istnieje macierz odwracalna $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, taka, że jedna z tych realizacji może być otrzymana z drugiej za pomocą przekształcenia przez podobieństwo.

Wyznaczenie realizacji układu zaczynamy od zbudowania z parametrów Markowa tzw. macierzy Hankela

$$H_k^{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} h_k & h_{k+1} & \ldots & h_{k+\beta-1} \\ h_{k+1} & h_{k+2} & \ldots & h_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k+\alpha-1} & h_{k+\alpha} & \ldots & h_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m\times\beta p},$$

$k = 1, 2, \ldots$. W dalszym ciągu założymy $\alpha = \beta = n$. Dla uproszczenia notacji, indeksy α, β będziemy pomijać w sytuacji kiedy ich wartość będzie znana z kontekstu. Będziemy potrzebować macierzy H_1 i H_1, które będziemy nazywać, odpowiednio, pierwszą i drugą macierzą Hankela. Dla $\alpha = \beta = n$ mamy

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_n \\ h_2 & h_3 & \ldots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \ldots & h_{2n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nm\times np}, \tag{31}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & \ldots & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & \ldots & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n+1} & h_{n+2} & \ldots & h_{2n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nm\times np}. \tag{32}$$

2 Algorytm realizacji własnej

Jedną z metod wyznaczania realizacji jest tzw. algorytm realizacji własnej ERA (ang. *eigensystem realization algorithm*). Zakładamy że znany jest stopień układu n, oraz że eksperymencie identyfikacyjnym wyznaczono parametry Markowa. Zaczynamy od zbudowania macierzy Hankela H_1 i H_2 zgodnie ze wzorami (31). Następnie wyznaczamy rozkład SVD macierzy Hankela H_1

$$H_1 = U\Sigma V^{\mathrm{T}}. \tag{33}$$

Nstąpnie oznaczamy

$$\tilde{R}_{\mathrm{o}} = U\Sigma^{\frac{1}{2}}, \qquad \tilde{R}_{\mathrm{c}} = \Sigma^{\frac{1}{2}}V^{\mathrm{T}}, \tag{34}$$

a następnie wyznaczamy macierze $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ i $\tilde{C}$

$$\tilde{A} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}H_2V\Sigma^{-\frac{1}{2}}, \tag{34a}$$

$$\tilde{B} = \tilde{R}_{\mathrm{c}}\begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{34b}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}\tilde{R}_{\mathrm{o}}. \tag{34c}$$

Zauważmy, że

$$\tilde{R}_{\mathrm{c}}\begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

to macierz utworzona z pierwszych m kolumn macierzy $\tilde{R}_{\mathrm{c}}$, czyli w notacji środowiska Matlab® $\tilde{R}_{\mathrm{c}}(:, 1:m)$ a

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}\tilde{R}_{\mathrm{o}}$$

to macierz utworzoną z pierwszych p wierszy macierzy $\tilde{R}_{\mathrm{o}}$ czyli w notacji środowiska Matlab® $\tilde{R}_{\mathrm{o}}(1:p, :)$.

Wzory (35) wymagają uzasadnienia. Można pokazać, że realizacje (A, B, C) i $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ są ze sobą związane przez podobieństwo i że macierz tego przekształcenia (oraz jej odwrotność) to

$$P = \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^{\mathrm{T}}R_{\mathrm{o}}, \quad P^{-1} = R_{\mathrm{c}}V\Sigma^{-\frac{1}{2}}. \tag{35}$$

3 Zadania

Zadanie 1. Dla układu SISO 4-go rzędu zmierzono (bez szumów) próbki odpowiedzi impulsowej (parametry Markowa) [Rys. 1]. Wyniki pomiaru przedstawia Tabela 1 Wyznacz realizację $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ tego układu metodą ERA.

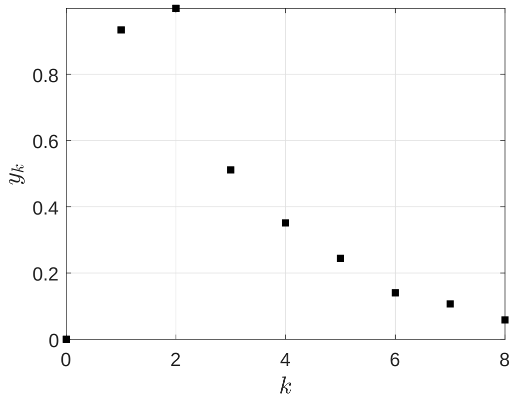
Wyniki:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.7035 & 0.2537 & 0.0425 & -0.0051 \\ -0.2537 & -0.3672 & 0.2644 & -0.0478 \\ 0.0425 & -0.2644 & -0.5956 & -0.3416 \\ -0.0051 & 0.0478 & -0.3416 & -0.2185 \end{bmatrix}, \tag{35a}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -1.0341 \\ -0.3692 \\ 0.0231 \\ -0.0095 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{C} = \begin{bmatrix} -1.0341 \\ 0.3692 \\ 0.0231 \\ -0.0095 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{35b}$$

Tabela 1: Parametry Markowa

parametr	wartość
h_0	0
h_1	0.9337
h_2	0.9987
h_3	0.5112
h_4	0.3512
h_5	0.2442
h_6	0.1403
h_7	0.1067
h_8	0.0584



Rysunek 1: Wartości odpowiedzi impulsowej. [Zadanie 1]

Zadanie 2. Weźmy pod uwagę realizację

$$A = \begin{bmatrix} 0.0176 & -0.2951 & 0.0074 & 0.2774 \\ -0.2271 & 0.0630 & -0.0366 & -0.3827 \\ 0.0653 & 0.0105 & -0.4767 & 0.3017 \\ 0.3291 & -0.3349 & 0.3066 & -0.0886 \end{bmatrix}, \tag{35c}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2.0518 \\ -0.3538 \\ -0.8236 \\ -1.5771 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0.5080 \\ 0.2820 \\ 0.0335 \\ -1.3337 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{35d}$$

Sprawdź, że układ opisany tą realizacją ma takie same parametry Markowa jak te z Tabeli 1. Wyznacz macierz przekształcenia przez podobieństwo P taką, że $\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$, $\tilde{C} = CP^{-1}$.

Wyniki:

$$P = \begin{bmatrix} -0.0244 & -0.3150 & 0.1371 & 0.6865 \\ 1.2922 & -0.1266 & 0.5910 & -1.7273 \\ -0.2578 & 0.3643 & -2.2215 & 1.3992 \\ -1.2192 & 0.5726 & -0.8786 & 1.9221 \end{bmatrix}, \tag{35e}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3336 & 1.8052 & 0.1534 & 1.0242 \\ -0.3977 & 1.9934 & -0.3634 & 2.1751 \\ 0.5439 & 0.6519 & -0.5584 & 0.7898 \\ 1.2129 & 0.8485 & -0.0497 & 0.8764 \end{bmatrix}. \tag{35f}$$